Proposition de corrigé du devoir surveillé 5

Exercice 1

1. Étude d'une matrice :

a) On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

La calcul du coefficient $(1,3)$ est : $2 \times (-3) + 1 \times (-1) + (-3) \times (-4) = 5$.

b) Utilisons la méthode du pivot de Gauss, sur les lignes, avec un formalisme matriciel :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On remarque qu'il y a trois pivots et donc que la matrice P est inversible.

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$. *Penser à vérifier que $PP^{-1} = I_3$.*

c) On trouve $AP = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, puis :

$$\boxed{P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

d) On trouve $\boxed{T^2 = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$, puis $\boxed{T^3 = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}}$.

e) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$:

- Initialisation : pour $n = 0, 1, 2$ et 3, la relation est clairement vérifiée.
- Hérédité : soit $n \geq 3$, on suppose que $T^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} T^{n+1}=T^nT &= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & -4(n+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le coefficient (1,2) est obtenu par : $1 \times (-4) + (-4n) \times 1 + 0 \times 0 = -4(n+1)$

- Conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$.

f) Comme $P^{-1}AP = T$ alors en multipliant à gauche par P on obtient : $PP^{-1}AP = PT$ c'est-à-dire $AP = PT$.
Puis, multipliant à droite par P^{-1} on obtient $APP^{-1} = PTP^{-1}$ c'est-à-dire $\boxed{A = PTP^{-1}}$.
Une récurrence rapide donne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
Ainsi on calcule premièrement, pour $n \in \mathbb{N}$, PT^n, ensuite on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} -4n+2^n & 1-2^n & 1+4n-2^n \\ 1-2^n & 2^n & -1+2^n \\ -1-4n+2^n & 1-2^n & 2+4n-2^n \end{pmatrix}}$$

g) ⇛ *Une première méthode consisterait à utiliser le méthode du pivot. Une autre méthode consiste à utiliser la décomposition en fonction de T avec le résultat du cours : le produit de matrices inversibles BCD est inversible d'inverse $(BCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}$ (fait pour deux matrices dans le cours). Il conviendrait alors de regarder si T est inversible, ce qui est rapide, et de donner $A^{-1} = PT^{-1}P^{-1}$. Enfin, une autre approche consiste à revenir à la définition en exhibant une matrice B telle que $AB = I_3$. Pour cela, nous essayons la matrice obtenue en remplaçant n par -1 dans l'expression de A^n obtenue en 1f).*

Considérons $B = \begin{pmatrix} -4-\frac{1}{2} & -1+\frac{1}{2} & 4-1+\frac{1}{2} \\ -1+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2} \\ 1-4-\frac{1}{2} & -1+\frac{1}{2} & 4-2+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & -1 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

On calcule maintenant AB et on trouve $AB = I_3$; ainsi, $\boxed{A \text{ est inversible}}$.
De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$C = (-1)^n \begin{pmatrix} 4n+2^{-n} & 1-2^{-n} & 1-4n-2^{-n} \\ 1-2^{-n} & 2^{-n} & -1+2^{-n} \\ -1+4n+2^{-n} & 1-2^{-n} & 2-4n-2^{-n} \end{pmatrix}$$

On calcule CA^n et on trouve $CA^n = I_3$, ainsi $(A^n)^{-1} = C$.
$\boxed{\text{L'expression trouvée en 1f) est valable pour } n \in \mathbb{Z}}$.

2. a) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= f(f(x,y,z)) = f(\underbrace{2x+y-3z}_{X}, \underbrace{x-2y-z}_{Y}, \underbrace{3x+y-4z}_{Z}) \\ &= (2X+Y-3Z, X-2Y-Z, 3X+Y-4Z) \\ &= \Big(2(2x+y-3z)+(x-2y-z)-3(3x+y-4z), \\ &\qquad (2x+y-3z)-2(x-2y-z)-(3x+y-4z), \\ &\qquad 3(2x+y-3z)+(x-2y-z)-4(3x+y-4z)\Big) \\ &= (-4x-3y+5z, -3x+4y+3z, -5x-3y+6z) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = (-4x-3y+5z, -3x+4y+3z, -5x-3y+6z)}$.

b) On note que pour déterminer l'image par f d'une triplet (x, y, z) il convient de multiplier le vecteur colonne associé par A, ainsi composer f par f revient à le multiplier par A^2 :

$$A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x - 3y + 5z \\ -3x + 4y + 3z \\ -5x - 3y + 6z \end{pmatrix}$$

On retrouve bien le résultat de la question 2a).

c) La matrice A est inversible, aussi, pour $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (a, b, c) \quad \Leftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ainsi tout vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ admet exactement un antécédent, $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et

$$\boxed{f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c) & \longmapsto & \frac{1}{2}(-9a - b + 7c, -a - b + c, -7a - b + 5c) \end{array} \right.}$$

d) On note que pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$f^n(x, y, z) = (a, b, c) \quad \Leftrightarrow \quad A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

et $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 - 2^n \\ 2^n \\ 1 - 2^n \end{pmatrix}$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f^n(0, 1, 0) = ((-1)^n - (-2)^n, (-2)^n, (-1)^n - (-2)^n)}$$

Exercice 2

1. Les applications g et h sont définies, continues et dérivables sur $]-1,+\infty[$:

• $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.

• $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

Ainsi $\boxed{\forall x > -1,\ g'(x) = \dfrac{-x}{1+x},\ h'(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}}$.

On obtient les tableaux suivants :

x	-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
$g(x)$		$-$	0	$-$	

x	-1		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$(1+x)^2$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$h(x)$		$+$	0	$+$	

Avec $g(0) = h(0) = \ln(1) = 0$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -h\left(\frac{1}{n}\right) \leq 0 \text{ d'après 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = -g\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq 0 \text{ d'après 1)} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante et la suite } (v_n) \text{ est croissante}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n - v_n = -\ln(n) + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0 \text{ car } \frac{n+1}{n} > 1$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq u_n}$.

c) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Comme (u_n) est décroissante, on a $u_{p+n} \leq u_p$.
De plus, (v_n) est croissante donc $v_n \leq v_{n+p}$.
Enfin, d'après 2b), on obtient $v_n \leq v_{n+p} \leq u_{p+n} \leq u_p$. Ainsi $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq u_p}$.
La suite (u_n) est donc décroissante et minorée (par v_1) ; ainsi, le théorème de limite monotone, donne que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$.
De même, (v_n) est croissante et majorée (par u_1), donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est convergente}}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $u_n - v_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \to \ln(1) = 0$$

Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0.}$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n = u_n - (u_n - v_n)$. Par opération sur les suites convergentes, on obtient

$v_n \to \gamma + 0 = \gamma$. Ainsi, $\boxed{\text{La suite } v_n \text{ converge vers } \gamma}$.
$\Rrightarrow$ Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
e) On a pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \geq n$: $v_n \leq v_p \leq u_p \leq u_n$.
Ainsi, par passage à la limite lorsque $p \to +\infty$, il vient $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n.}$
f) Script PYTHON qui calcule une valeur approchée de la constante d'Euler-Mascheroni, limite commune de (u_n) et (v_n). On rappelle que $u_n - v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

```
import numpy as np
def constante_EM(p):
    u,n=1,1
    while np.log(1+1/n)>p:
        n=n+1
        u=u+1/n
    return(u-np.log(n+1),u-np.log(n))
```

Ce qui donne :

```
>>> constante_EM(1e-8)
(0.5772156599001903, 0.57721566990018758)
```

3. Comme $u_n \to \gamma$ alors $u_{2n} \to \gamma$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{2n} - u_n) = \gamma - \gamma = 0}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{2n} - \ln(2n) + \ln(n)$$

Or $-\ln(2n) + \ln(n) = \ln\left(\dfrac{n}{2n}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, donc

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{2n} = u_{2n} - u_n + \ln(2) \to 0 + \ln(2) = \ln(2)$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} \cdots + \dfrac{1}{2n} = \ln(2)}$.

4. a) $\Rrightarrow$ *Une méthode consiste à étudier le signe de la fonction obtenue par différence des deux membres de l'inégalité*
Posons $f_1 : x \mapsto e^x - 1 - x$ et $f_2 : x \mapsto 1 + x + x^2 - e^x$ sur $[0, 1]$. Ces fonctions sont dérivables :

$$f_1'(x) = e^x - 1 \qquad f_2'(x) = 1 + 2x - e^x \qquad f_2''(x) = 2 - e^x$$

$\Rrightarrow$ *L'étude du signe de f_2' n'est pas évident ; on dériver à nouveau !*

x	0		1
$f_1'(x)$		$+$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	
$f_1(x)$		$+$	

$$f_2''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(2)$$

et $f_2'(1) = 1 + 2 - e^1 = 3 - e \approx 0.28 (> 0)$:

x	0		$\ln(2)$		1
$f_2''(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2'(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	≈ 0.28
$f_2'(x)$		$+$		$+$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	
$f_2(x)$		$+$		$+$	

Ainsi $\boxed{\forall x \in [0; 1], \ 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq n \quad &\Rightarrow \quad (n+1)^2 \leq (n+k)^2 \leq (n+n)^2 \text{ car } x \mapsto (x+n)^2 \text{ est croissante sur } [1, +\infty[\\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } [1, +\infty[\end{aligned}$$

Par sommation des inégalités, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n^2} \leq w_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4n} \leq w_n \leq \frac{n}{(n+1)^2}$$

Or $\frac{1}{4n} \to 0$ et $\frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n^2(1+\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})^2} \to 0$.
Par encadrement, on obtient $\boxed{w_n \to 0}$.

c) D'après 4a), pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$ on a, $\frac{1}{n+k} \in [0, 1]$ donc

$$1 + \frac{1}{n+k} \leq e^{\frac{1}{n+k}} \leq 1 + \frac{1}{n+k} + \left(\frac{1}{n+k}\right)^2$$

Par sommation des inégalités on obtient :

$$\boxed{n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} \leq n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+k}\right)^2}$$

d) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+k}\right)^2$$

De plus, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \to \ln(2)$ d'après 3) et $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+k}\right)^2 \to 0$ d'après 4b).

Par encadrement on obtient : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n = \ln(2)}$.

Exercice 3

1. a) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (on remarque que quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 0$).

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + n}$$

De même, la fonction f_n' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= -\frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} \\ &= -\frac{e^x(1+e^x)(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^4} \text{ avec } 1+\exp > 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n''(x) = -\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}}$$

b) L'expression $f_n''(x)$ est du signe contraire de celui de $1 - e^x$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
f_n'		$\searrow$	$f_n'(0)$	$\nearrow$	

Or $f_n'(0) = -\dfrac{e^0}{(1+e^0)^2} + n = n - \dfrac{1}{4} > 0$ car $n \geqslant 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) > 0$.

Ceci assure bien que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

2. a) Il n'y a pas de forme indéterminée. Les opérations sur les limites donnent :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty}$$

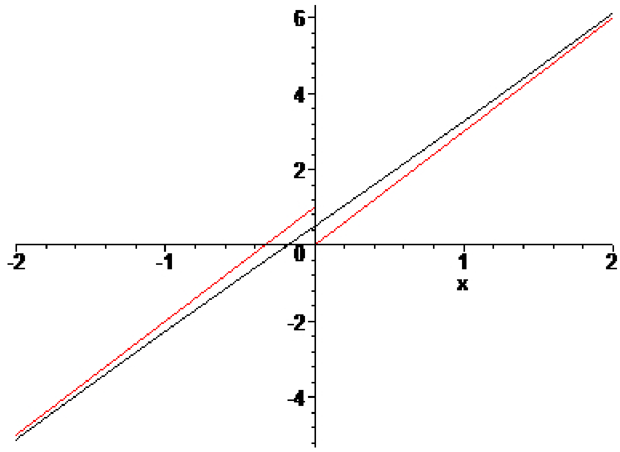
b) De même, on obtient :

$$\lim_{x \to -\infty} f_n(x) - nx - 1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^x} - 1 = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f_n(x) - nx = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$$

Les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 < 1 + e^x \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{1+e^x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad nx \leq f_n(x) \leq nx + 1$$

La courbe est toujours au-dessus de (D_n) et au-dessous de (D_n').



3. a) La fonction f_n est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Le <u>théorème de la bijection</u> donne que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ avec $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f_n(x); \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= \mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ possède donc bien une seule solution sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons le tableau de signes de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		u_n		$+\infty$
$f_n(x)$		$-$	0	$+$	

Déterminons le signe de $f_n(-\frac{1}{n})$ et de $f_n(0)$:

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = -\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{-1}{n}}} < 0$$

De plus $f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0$. Ainsi, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0.}$

c) Or $\lim_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$, donc d'après le <u>théorème d'encadrement</u>, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

d) Par définition de (u_n) et par composition de limites, on a

$$f_n(u_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+e^{u_n}} + nu_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{nu_n = -\frac{1}{1+e^{u_n}} \to -\frac{1}{2}}$$