DS 5

Mercredi 27 novembre 2024 – durée : 2 h

Exercice 1

1. Étude d'une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Calculer A^2.
   b) Montrer que P est inversible est donner son inverse.
   c) Calculer $P^{-1}AP$. On notera T la matrice triangulaire supérieure obtenue.
   d) Calculer T^2, puis T^3.
   e) Pour $n \in \mathbb{N}$, proposer une expression de T^n et établir ce résultat à l'aide d'une récurrence.
   f) Exprimer A en fonction de T et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} -4n + 2^n & 1 - 2^n & 1 + 4n - 2^n \\ 1 - 2^n & 2^n & -1 + 2^n \\ -1 - 4n + 2^n & 1 - 2^n & 2 + 4n - 2^n \end{pmatrix}$$

   g) A est-elle inversible ? Si oui, en utilisant la méthode de votre choix, déterminer l'expression de A^{-n} pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Lien avec une application : on définit l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y - 3z, x - 2y - z, 3x + y - 4z) \end{array} \right.$$

   a) Déterminer l'expression de la fonction $g = f \circ f$, c'est à dire, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner l'expression de $g(x, y, z)$ en fonction de x, y, z.
   b) On remarque que pour tout $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (a, b, c) \quad \Leftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

   Retrouver le résultat de la question 2a), à partir de la question 1a).
   c) f est-elle bijective ? Si oui, donner l'expression de f^{-1}.
   d) Donner l'expression de $f^n(0, 1, 0)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

On rappelle les valeurs approchées suivantes : $\ln(2) \approx 0,69$ et $e^1 \approx 2,72$.

1. Étudier les applications suivantes sur $]-1,+\infty[$ et en donner le signe :

$$g : x \mapsto \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$.
   c) Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_p$.
   En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergente. On note γ la limite de (u_n).
   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n$. Que dire de la limite de la suite (v_n).
   e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$.
   f) Donner le script Python d'une fonction `constante_EM(p)` qui retourne un encadrement de γ d'amplitude `p`.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n} - u_n)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{2n}$.
4. a) Montrer que $\forall x \in [0;1],\ 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$.
   b) Grâce à un encadrement, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$.
   c) Déterminer un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}$.
   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx.$$

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
   b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   b) Montrer que les droites (D_n) et (D'_n) d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n). Déterminer les positions relatives.
   c) Tracer sur un même dessin, pour $n = 1$: la courbe (C_1), la droite (D_1) et la droite (D'_1).
3. a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.
   On notera u_n cette solution.
   b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{n} < u_n < 0$.
   c) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
   d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = -\frac{1}{2}$