Corrigé du DM 9

Suite récurrente

1. Le programme PYTHON suivant calcule et affiche u_n, pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```python
n=int(input('entrer la valeur de n : '))
u=1
for k in range(1,n+1):
    u=np.log(1+u*u)
print(u)
```

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 \in [0;1]$
- Hérédité : fixons $n \geq 0$; supposons $u_n \in [0;1]$.

$$\begin{aligned}
0 \leq u_n \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq u_n^2 \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad 1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2 \\
&\qquad\qquad \text{comme ln est croissante} \\
&\Rightarrow \quad \ln(1) \leq \ln\left(1 + u_n^2\right) \leq \ln(2) \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \ln(2) < \ln(e) = 1
\end{aligned}$$

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.}$

3. a) La fonction f est dérivable sur $[0;1]$; on a

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{-1 + 2x - x^2}{1+x^2} = -\frac{(1-x)^2}{1+x^2} \leq 0$$

Avec $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. De plus, $f(0) = \ln(1) = 0$ et $f(1) = \ln(2) - 1$.
Le tableau de variations et de signes de f est :

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln(2) - 1$
$f(x)$		$-$	

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 3a)

$$u_n \in [0;1] \quad \Rightarrow \quad f(u_n) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(1 + u_n^2\right) - u_n \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

c) La suite (u_n) est décroissante (d'après 3b) et minorée par 0 (d'après 2).
Le théorème de limite monotone donne que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge.}}$

4. a) Posons $g : x \mapsto \ln(1 + x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$; g est dérivable :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leq 0$$

Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$, donc $g \leq 0$.
Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(1 + x) \leq x.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 4a)

$$u_n^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(1+u_n^2\right) \leq u_n^2 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} \leq u_n^2$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n^2.}$

c) Montrons par récurrence sur $n_i n \mathbb{N}^*$: $u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$

- Initialisation : pour $n = 1$, $u_1 = \ln\left(1+1^2\right) = \ln(2)$
- Hérédité : fixons $n \geq 1$, supposons $u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$.

Reprenant la démarche de la question 2), la croissance de ln donne :

$$u_{n-1} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad u_n \leq \ln\left(1+1^1)\right) = \ln(2)$$

D'après 4b), il vient :

$$u_{n+1} \leq u_n \times u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n \times \ln(2) = \left(\ln(2)\right)^{n+1}$$

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n.}$

d) Comme $\ln(2) \in [0;1[$, alors $\left(\ln(2)\right)^n \to 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 \leq u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$.
Par par encadrement $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$

e) Le script calcul successivement les termes de la suites (u_n) et s'arrête dès que $u_n < 10^{-4}$.
A chaque étape, la variable `n` contient le rang du terme calculé.
Ainsi, $\boxed{\text{le programme affiche } \mathtt{n} \text{ : le rang du premier terme vérifiant } u_n < 10^{-4}.}$
Concrètement $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ sont plus grand que 10^{-4} et $u_6 < 10^{-4}$.

5. On note que $u_0 = 1 = \left(\ln(2)\right)^0$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$. Soit $n \geq 2$, par sommation des inégalités pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln(2)\right)^k = \frac{1-\left(\ln(2)\right)^n}{1-\ln(2)}$$

On reconnaît une somme usuelle, celle des termes d'une suite géométrique.

Ainsi, $\boxed{\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1-\left(\ln(2)\right)^n}{1-\ln(2)}}$