DM 9

à rendre le mardi 10 décembre 2024

Suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(1+u_n^2\right)$.

1. Compléter le script Python suivant pour qu'il calcule et affiche u_n, pour une valeur de n entrée par l'utilisateur. On rappelle que la fonction ln en Python est `np.log`, en supposant le module `numpy` chargé par le raccourcis `np`.

```python
n=int(input('entrer la valeur de n : '))
u=...
for k in range(1,n+1):
    u=...
print(u)
```

2. Établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq 1$. Rappel : $\ln(2) \approx 0.69$

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$, à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - x$.

a) Dresser le tableau de variations de f puis déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

4. a) Montrer pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité : $\ln(1+x) \leq x$.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.

c) En déduire pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité $u_n \leq \left(\ln(2)\right)^n$.

d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

e) On considère le programme Python suivant :

```python
n,u=0,1
while u>=0.0001:
    u=np.log(1+u**2)
    n=n+1
print(n)
```

On exécute ce programme. Le résultat affiché est 6.
Quelle est la signification de ce résultat ?

5. Établir pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1-\left(\ln(2)\right)^n}{1-\ln(2)}$.