Corrigé du DM 10

Trois bijections

1. F est définie sur $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}\backslash\{a,b,c\}$. Les fractions rationnelles étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition, F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$.

Pour tout $\lambda \in \mathcal{D}_F$, on a : $F'(\lambda) = -\dfrac{u^2}{(\lambda-a)^2} - \dfrac{v^2}{(\lambda-b)^2} - \dfrac{w^2}{(\lambda-c)^2} < 0$.

λ	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$F'(\lambda)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
$F(\lambda)$	0 $\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	0

F est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,a[$, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{a-} = -\infty$ donc d'après le théorème de la bijection F réalise une bijection G_1 de $]-\infty,a[$ sur $]-\infty,0[$.
En particulier F ne s'annule pas sur $]-\infty,a[$.
De même F réalise une bijection G_2 de $]a,b[$ sur $\mathbb{R}$. Donc $\exists!\ \rho_1 \in]a,b[$ tel que $F(\rho_1) = 0$.
De même F réalise une bijection G_3 de $]b,c[$ sur $\mathbb{R}$. Donc $\exists!\ \rho_2 \in]b,c[$ tel que $F(\rho_2) = 0$.
Enfin F réalise une bijection G_4 de $]c,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et donc ne s'annule pas sur $]c,+\infty[$.
Ainsi, $\boxed{F \text{ prend la valeur } 0 \text{ en deux points } \rho_1 \text{ et } \rho_2 \text{ vérifiant } \rho_1 < \rho_2.}$

2. a) λ est solution de (E_t) si et seulement si $F(\lambda) = \dfrac{1}{t}$.
Si $t > 0$ alors $\dfrac{1}{t} > 0$ et d'après l'étude des bijections réalisées par F, il existe un unique $\lambda_1(t) \in]a,b[$ tel que $F(\lambda_1(t)) = \dfrac{1}{t}$, un unique $\lambda_2(t) \in]b,c[$ tel que $F(\lambda_2(t)) = \dfrac{1}{t}$ et un unique $\lambda_3(t) \in]c,+\infty[$ tel que $F(\lambda_3(t)) = \dfrac{1}{t}$. En revanche, il n'y a pas de solution dans $]-\infty,a[$.
Si $t < 0$, on obtient de la même façon $\lambda_1(t) \in]-\infty,a[$, $\lambda_2(t) \in]a,b[$ et $\lambda_3(t) \in]b,c[$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \neq 0,\ (E_t) \text{ admet trois solutions réelles distinctes } \lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t).}$

b) D'après le théorème de la bijection, G_1^{-1} et G_2^{-1} sont strictement décroissantes et on peut dresser leurs tableaux de variations :

s	$-\infty$	0
$G_1^{-1}(s)$	a $\searrow$	$-\infty$

s	$-\infty$	$+\infty$
$G_2^{-1}(s)$	b $\searrow$	a

$$\lambda_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} G_1^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right) & \text{si } t < 0 \\ G_2^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right) & \text{si } t > 0 \end{cases} \end{array}$$

$\dfrac{1}{t} \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} G_1^{-1} = a$ donc par composition $\lambda_1(t) \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} a$.
$\dfrac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} G_2^{-1} = a$ donc par composition $\lambda_1(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} a$.
Ainsi $\lim\limits_{0^-} \lambda_1 = \lim\limits_{0^+} \lambda_1 = a$. Or λ_1 n'est pas définie en 0 donc λ_1 admet $a \in \mathbb{R}$ pour limite en 0 et :

$\boxed{\lambda_1 \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } \lambda_1(0) = a.}$

3. a) $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]-\infty,0[$ à valeurs dans $]-\infty,0[$ et d'après le théorème de la bijection G_1^{-1} est continue sur $]-\infty,0[$ donc par composition λ_1 est continue sur $]-\infty,0[$.
$t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[\subset \mathbb{R}$ et d'après le théorème de la bijection G_2^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composition λ_1 est continue sur $]0,+\infty[$.
Par ailleurs, λ_1 est continue en 0 d'après la question précédente.
Donc λ_1 est continue sur $\mathbb{R}$. On obtient de même la continuité de λ_2 et λ_3.
Ainsi, $\boxed{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ sont continues sur } \mathbb{R}.}$
b) Pour $t \neq 0$, (E_t) se réécrit avec $\lambda_1(\mathbb{R}^*) =]-\infty;a[\cup]a,\rho_1[$:

$$u^2 + (\lambda_1(t)-a)\left(\frac{v^2}{\lambda_1(t)-b} + \frac{w^2}{\lambda_1(t)-c}\right) = \frac{(\lambda_1(t)-a}{t}$$

Or $\lambda_1(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} a$ donc $\dfrac{(\lambda_1(t)-\lambda_1(0)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} u^2 \in \mathbb{R}$. Comme le taux d'accroissement de λ_1 en 0 admet une limite finie, alors $\boxed{\lambda_1 \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \lambda_1'(0) = u^2.}$
c) On obtient de façon rigoureusement identique :
$\boxed{\lambda_2 \text{ et } \lambda_3 \text{ sont dérivables en } 0,\ \lambda_2'(0) = v^2 \text{ et } \lambda_3'(0) = w^2.}$
4. a) $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\lim\limits_{0} G_2^{-1} = \rho_1$ où ρ_1 introduit à la question 1 est l'unique point de $]a,b[$ en lequel F s'annule. Donc par composition, $\lambda_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \rho_1$.
$\dfrac{1}{t} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\lim\limits_{0} G_1^{-1} = -\infty$ donc par composition, $\lambda_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Les autres limites se déterminent de façon analogue.

	λ_1	λ_2	λ_3
Limite en $+\infty$	ρ_1	ρ_2	$+\infty$
Limite en $-\infty$	$-\infty$	ρ_1	ρ_2

b) Pour tout $t<0$, $\lambda_1(t) = G_1^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ or $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ à valeurs dans $]-\infty,0[$ et G_1^{-1} est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ à valeurs dans $]-\infty,a[$ donc λ_1 est strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et $\forall\, t<0,\ \lambda_1(t) < a$.
Pour tout $t>0$, $\lambda_1(t) = G_2^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ or $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[\subset \mathbb{R}$ et G_2^{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]a,b[$ donc λ_1 est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\forall\, t>0,\ \lambda_1(t) > a$.
Enfin $\lambda_1(0) = a$ donc λ_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De même pour λ_2 et λ_3.

$$\begin{array}{c|ccc} t & -\infty & & +\infty \\ \hline & & & \rho_1 \\ \lambda_1(t) & & \nearrow & \\ & -\infty & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} t & -\infty & & +\infty \\ \hline & & & \rho_2 \\ \lambda_2(t) & & \nearrow & \\ & \rho_1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} t & -\infty & & +\infty \\ \hline & & & +\infty \\ \lambda_3(t) & & \nearrow & \\ & \rho_2 & & \end{array}$$