DM 10

à rendre le mardi 17 décembre 2024

Trois bijections

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $a < b < c$ et $(u,v,w) \in (\mathbb{R}^*)^3$.
On considère pour tout $t \neq 0$, l'équation d'inconnue λ :

$$\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t} \quad (E_t)$$

1. Donner les variations de la fonction :

$$F \,:\, \lambda \mapsto \frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c}.$$

En déduire que F prend la valeur 0 en deux points ρ_1 et ρ_2 vérifiant $\rho_1 < \rho_2$.

2. a) Montrer que pour tout $t \neq 0$, l'équation (E_t) admet trois racines réelles distinctes, notées

$$\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$$

Indication : on distinguera deux cas, selon que $t > 0$ ou $t < 0$.

b) Montrer qu'on peut prolonger λ_1 par continuité en 0 en posant $\lambda_1(0) = a$.
On admettra qu'on peut également prolonger par continuité en 0 les fonctions λ_2 et λ_3 en posant $\lambda_2(0) = b$ et $\lambda_3(0) = c$.
Ainsi prolongées, les fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 sont définies sur $\mathbb{R}$.

3. Continuité et dérivabilité

a) Montrer que les fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 sont continues sur $\mathbb{R}$.

b) En utilisant l'égalité (E_t) pour $\lambda = \lambda_1(t)$, montrer que :

$$\frac{\lambda_1(t) - a}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} u^2.$$

En déduire que λ_1 est dérivable en 0.

c) Montrer de même que λ_2 et λ_3 sont dérivables en 0 ; donner $\lambda_2'(0)$ et $\lambda_3'(0)$.

4. a) Déterminer les limites éventuelles des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 en $+\infty$ puis en $-\infty$.
Résumer les résultats sous forme d'un tableau à deux entrées.

b) Dresser le tableau de variation des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3.