DS 6

Mercredi 18 décembre 2024 – durée : 3 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Développement asymptotique d'une suite

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $P_n = X^{2n} - 2nX + 1$. Soit a_n la plus grande racine réelle de P_n.

1. a) Étudier les variations de $x \mapsto P_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $a_n > 1$.

   b) Montrer que $P_n(2) \sim 4^n$.
   En déduire qu'à partir d'un certain rang, on a : $a_n < 2$.

2. On pose, pour tout $n \geq 2$, $\varepsilon_n = a_n - 1$.

   a) Montrer qu'il existe $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ convergeant vers 0 telle que :

   $$\ln(1+\varepsilon_n) = \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{2n} + \frac{\ln(2+\alpha_n)}{2n}.$$

   b) Montrer que :

   $$\frac{\ln(2+\alpha_n)}{2n} = o\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{2n} = o\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right).$$

   En déduire un équivalent simple de $\ln(1+\varepsilon_n)$.

   c) Montrer que $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ et en déduire que :

   $$a_n = 1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Exercice 2 - Suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2,\ u_n = \frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n-1} u_j.$$

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs.

   b) Vérifier que $u_2 = \dfrac{1}{3}$ puis calculer u_3.

   c) Compléter la fonction Python suivante de paramètre d'entrée $n \in \mathbb{N}^*$ et calcule u_n :

```
def suite(n):
    somme,u=1,1
    for i in ...:
        ...
        ...
    return(u)
```

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \dfrac{1}{2n-1}$.

   b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$.

   On pourra se ramener à montrer que : $\forall x > 0,\ g(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} \leq 0$.

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j$.

   Déduire des deux questions précédentes que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. a) Établir que pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}u_n$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$, où $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$.

   b) En utilisant la question 2, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$, puis montrer que $\dbinom{2n}{n} = o(4^n)$.

   c) En utilisant la question 3, montrer que $\dfrac{4^n}{n} = o\left(\dbinom{2n}{n}\right)$.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et α un nombre réel.
On définit la fonction Z_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0 \quad Z_n(x) = \int_1^x t^\alpha \ln^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie A - Étude des fonctions Z_n

1. a) Montrer que Z_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée.

b) Dresser le tableau des variations de Z_n.
On ne cherchera pas à déterminer les limites de Z_n aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$.

2. Dans cette question, on prend $n = 0$ et $\alpha \neq -1$.
   a) Calculer $Z_0(x)$.
   b) Donner les limites de Z_0 aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Dans cette question, on prend $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = -1$.
   a) Calculer $Z_n(x)$.
   b) Donner les limites de Z_n aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B - Recherche de primitives

On appelle *fonction polynomiale de degré au plus n* toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$P \,:\, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

où $a_0, \dots, a_n$ sont des constantes réelles.
On note $\mathcal{N}_\alpha^n$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme :

$$f \,:\, x \mapsto P(\ln(x))x^\alpha,$$

où P est une fonction polynomiale de degré au plus n.

1. Dans cette question, on prend $\alpha \neq -1$.
   a) Établir pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$Z_{n+1}(x) = \frac{x^{\alpha+1}\ln^{n+1}(x) - (n+1)Z_n(x)}{\alpha+1}.$$

   b) En déduire pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{Z_n(x)}{n!} = \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k} \frac{\ln^k(x)}{k!}\right] x^{\alpha+1}.$$

2. On se place toujours dans le cas $\alpha \neq -1$.
   Montrer que toute fonction élément de $\mathcal{N}_\alpha^n$ admet une primitive élément de $\mathcal{N}_{\alpha+1}^n$.
3. Que peut-on dire dans le cas où $\alpha = -1$?

Partie C - Résolution d'une EDL 1

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue $y \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$:

$$(E_1) \quad : \quad xy' + \alpha y = x\ln^n(x).$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E_1).
2. a) Exprimer une solution particulière de (E_1) à l'aide de la fonction Z_n.
   b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).

Partie D - Résolution d'une EDL 2

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$:

$$(E_2) \quad : \quad x^2y'' + (1-2\alpha)xy' + \alpha^2 y = 0.$$

Une fonction $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est solution de (E_2) ssi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) + (1-2\alpha)xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0$.

1. Soit $h \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On définit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ k(t) = h(e^t).$$

   a) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $h(x)$ en fonction de k.

   b) Exprimer h' et h'' à l'aide de k' et k''.

   c) Montrer que h est solution de (E_2) si, et seulement si, k vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ k''(t) - 2\alpha k'(t) + \alpha^2 k(t) = 0.$$

2. On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$(E_3) \quad : \quad y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0.$$

   Déterminer l'ensemble des solutions de (E_3).

3. Déduire des questions précédentes que l'ensemble des solutions de (E_2) est $\mathcal{N}_\alpha^1$.