Proposition de corrigé du devoir surveillé 6

Exercice 1 - Développement asymptotique d'une suite

1. a) P_n est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$P_n'(x) = 2nx^{2n-1} - 2n = 2n(x^{2n-1} - 1)$$

Donc $P_n'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ car $t \mapsto t^{2n-1}$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$.
De plus, on note que $P_n(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^{2n}$ donc $\lim\limits_{\pm\infty} P_n = +\infty$. Ainsi,

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & 1 & & +\infty \\
\hline
P_n'(x) & & - & 0 & + & \\
\hline
 & +\infty & & & & +\infty \\
P_n(x) & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & 2-2n & &
\end{array}$$

P_n est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. D'après le <u>théorème de la bijection</u>, P_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2 - 2n, +\infty[$.
Or $n \geq 2$ donc $2 - 2n < 0$. 0 admet un unique antécédent par P_n sur $[1, +\infty[$. On note a_n cet antécédent.
Plus précisément, pour $n \geq 2$, $P_n(1) = 2 - 2n < 0$ donc $\boxed{1 < a_n}$.
$\Rrightarrow$ *P_n admet une autre racine sur $]-\infty, 1]$.*

b) Pour tout $n \geq 2$, $P_n(2) = 2^{2n} - 2n \times 2 + 1 = 4^n - 4n + 1$.
Comme $4 > 1$ alors $1 = o(4^n)$ et $-4n = o(4^n)$, donc $P_n(2) = 4^n + o(4^n)$. Ainsi,

$$\boxed{P_n(2) \sim 4^n}$$

Or $\lim 4^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(2) = +\infty$. A partir d'une certain rang $P_n(2) > 0$ et donc d'après l'étude faite en 1a), $a_n < 2$. Ainsi, $\boxed{\text{à partir d'un certain rang } a_n < 2}$.

2. a) Soit $n \geq 2$. On note que $1 + \varepsilon_n = a_n$. Par définition, a_n vérifie

$$\begin{aligned}
a_n^{2n} - 2na_n + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n^{2n} = 2na_n - 1 = na_n\left(2 - \frac{1}{na_n}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(a_n^{2n}\right) = \ln\left(na_n\left(2 - \frac{1}{na_n}\right)\right) \\
&\qquad\qquad \text{car ln est bijective} \\
&\Leftrightarrow \quad 2n\ln(a_n) = \ln(n) + \ln(a_n) + \ln\left(2 - \frac{1}{na_n}\right)
\end{aligned}$$

Posons $\boxed{\forall n \geq 2,\ \alpha_n = -\frac{1}{na_n}}$, alors

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \ln(1 + \varepsilon_n) = \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{\ln(1 + \varepsilon_n)}{2n} + \frac{\ln(2 + \alpha_n)}{2n}}$$

Il reste à établir que $\alpha_n \to 0$. A partir d'un certain rang, d'après 1a) et 1b),

$$\begin{aligned}
1 < a_n < 2 \qquad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{a_n} < 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{n} \\
&\Rightarrow \quad -\frac{1}{n} < \alpha_n < -\frac{2}{n}
\end{aligned}$$

<u>Par encadrement</u> $\boxed{(\alpha_n)_{n\geq 2} \text{ converge vers } 0}$.

b) • Par composition de limite, $\lim \ln(2+\alpha_n) = \ln(2)$, donc

$$\frac{\frac{\ln(2+\alpha_n)}{2n}}{\frac{\ln(n)}{2n}} = \frac{\ln(2+\alpha_n)}{\ln(n)} \to 0$$

• De plus $\dfrac{\frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{2n}}{\frac{\ln(n)}{2n}} = \dfrac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\ln(n)}$

Or, à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} 1 < 1+\varepsilon_n = a_n < 2 \quad & \Rightarrow \quad 0 < \ln(1+\varepsilon_n) < \ln 2 \\ & \qquad \text{car ln est croissante} \\ & \Rightarrow \quad \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\ln 2}{\ln(n)} \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1}{\ln(n)} \to 0$, <u>par encadrement</u> $\dfrac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\ln(n)} \to 0$.

Ainsi, $\boxed{\dfrac{\ln(2+\alpha_n)}{2n} = o\left(\dfrac{\ln(n)}{2n}\right) \text{ et } \dfrac{\ln(1+\varepsilon_n)}{2n} = o\left(\dfrac{\ln(n)}{2n}\right)}$.

On en déduit, d'après 2a) que

$$\ln(1+\varepsilon_n) = \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right)$$

Ainsi, $\boxed{\ln(1+\varepsilon_n) \sim \dfrac{\ln(n)}{2n}}$.

c) Comme $\ln(n) = o(2n)$, on a $\lim \ln(1+\varepsilon_n) = 0$.

Par composition avec l'application exp continue en 0 : $\lim 1+\varepsilon_n = \exp(0) = 1$.

Par opération sur les limites $\lim \varepsilon_n = 0$. L'équivalent usuel de exp donne

$$\boxed{\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n}$$

Ainsi, $\varepsilon_n \sim \ln(1+\varepsilon_n) \sim \dfrac{\ln(n)}{2n}$, donc (avec $\varepsilon_n = a_n - 1$)

$$a_n - 1 = \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a_n = 1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$$

Exercice 2 - Suite récurrente

1. a) Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n > 0$.

- Initialisation : $u_1 = 1 > 0$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(j)$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par somme d'inégalités, l'hypothèse de récurrence donne : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j > 0$.

Or $\dfrac{1}{2n+1} > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0.}$

b) On a $u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 = \dfrac{1}{3}$ et $u_3 = \dfrac{1}{5}(u_1 + u_2) = \dfrac{4}{15}$. On a $\boxed{u_2 = \dfrac{1}{3},\quad u_3 = \dfrac{4}{15}.}$

c) Script Python pour le calcul de u_n :

```python
def suite(n):
    somme,u=1,1
    for i in range(2,n+1):
        u=somme/(2*i-1)
        somme=somme+u
    return(u)
```

2. a) Soit $n \geq 2$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j \geq u_1$ d'après 1a). Donc $u_n \geq \dfrac{u_1}{2n-1}$ i.e. $u_n \geq \dfrac{1}{2n-1}$.

L'inégalité reste vraie lorsque $n = 1$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \dfrac{1}{2n-1}.}$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$.

Or pour tout $u \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+u) \leq u$, en l'appliquant à $u = \dfrac{1}{k}$ il vient :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$$

Attention ! Le résultat $\forall u \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$ est connu et peut être admis. Il est dans votre fiche de TD1. Pour le montrer, il s'agit de poser la fonction obtenue par différence des deux membres et d'étudier ses variations et déduire son signe.

Méthode : Pour montrer le résultat, on étudie, sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$.

c) D'après 2a), on a $v_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1}$.

Or $\dfrac{1}{2j-1} \geq \dfrac{1}{2j}$ donc par somme d'inégalités $v_n \geq \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

D'après 2b), il vient : $v_n \geq \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \big(\ln(j+1) - \ln(j)\big)$.

Cette somme est téléscopique : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \big(\ln(j+1) - \ln(j)\big) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$.

Or $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

3. a) Soit $n \geq 2$, on a $(2n+1)u_{n+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{j=1}^{n-1} u_j + u_n$.

Or $(2n-1)u_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$. Donc $(2n+1)u_{n+1} = (2n-1)u_n + u_n = 2nu_n$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}u_n.}$

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

- Initialisation : $u_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$ d'où $\mathcal{P}(1)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

D'après $\mathcal{P}(n)$ et 3a) on a $u_{n+1} \leq \dfrac{2n}{(2n+1)\sqrt{n}}$.

Or $\dfrac{2n}{(2n+1)\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{4n^2}{4n^3+4n^2+n}} \leq \sqrt{\dfrac{4n^2}{4n^3+4n^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Méthode : On peut plus simplement étudier le signe de $\sqrt{\dfrac{1}{n+1}} - \dfrac{2n}{(2n+1)\sqrt{n}}$ en utilisant la quantité conjuguée.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}.}$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

4. a) Montrons par récurrence sur $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$.

- Initialisation : $\dfrac{4^2}{8\binom{4}{2}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} = u_2$ d'où $\mathcal{P}(2)$.
- Hérédité : Soit $n \geq 2$, supposons $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$:

d'après $\mathcal{P}(n)$ et 3.a on a $u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} \times \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}} = \dfrac{4^n n!n!}{2(2n+1)(2n)!}$.

Or $\dfrac{4^n n!n!}{2(2n+1)(2n)!} = \dfrac{4^n n!n!}{2(2n+1)!} = \dfrac{4^n(n+1)!(n+1)!}{2(n+1)^2(2n+1)!} = \dfrac{4^n(n+1)!(n+1)!}{(n+1)(2n+2)!} = \dfrac{4^{n+1}}{4(n+1)\binom{2n+2}{n+1}}$.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 2,\ u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}.}$

b) Soit $n \geq 2$, d'après la définition de v_{n-1}, on a $v_{n-1} = (2n-1)u_n = nu_n\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$.

Or $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par opération sur les limites $nu_n = \dfrac{v_{n-1}}{2-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi, $\boxed{nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

D'après 4a), il vient alors $\dfrac{4^n}{4\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\boxed{\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$, noté aussi $\boxed{\dbinom{2n}{n} = o(4^n).}$

c) On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $4u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $\boxed{\dfrac{4^n}{n} \times \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$, noté aussi $\boxed{\dfrac{4^n}{n} = o\left(\dbinom{2n}{n}\right).}$

Problème

Partie A - Étude des fonctions Z_n

1. a) La fonction $g : t \mapsto t^\alpha \ln^n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle possède une primitive, G, qui est de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors $Z_n : x \mapsto \displaystyle\int_1^x g(t)\mathrm{d}t = G(x) - G(1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $Z_n' : x \mapsto g(x)$.
Ainsi, $\boxed{Z_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } Z_n' : x \mapsto x^\alpha \ln^n(x).}$
b) Effectuons une disjonction de cas selon la parité de n :

- si n est paire

x	0		1		$+\infty$
x^α	$\|\|$	$+$		$+$	
$\ln^n(t)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
$Z_n'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
Z_n	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

- si n et impair

x	0		1		$+\infty$
x^α	$\|\|$	$+$		$+$	
$\ln^n(t)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$Z_n'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Z_n	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

2. Posons $n = 0$ et $\alpha \neq -1$:
a) On a $\boxed{Z_0(x) = \displaystyle\int_1^x t^\alpha \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] = \frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}.}$
b) On a $\boxed{\text{si } \alpha > -1, \quad \begin{cases} \lim\limits_{0^+} Z_0 = \dfrac{-1}{\alpha+1} \\ \lim\limits_{+\infty} Z_0 = +\infty \end{cases}, \text{ et si } \alpha < -1, \quad \begin{cases} \lim\limits_{0^+} Z_0 = -\infty \\ \lim\limits_{+\infty} Z_0 = \dfrac{-1}{\alpha+1} \end{cases}}$
3. Posons $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = -1$.
a) On a $\boxed{Z_n(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln^n(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln^{n+1}(t)}{n+1}\right]_1^x = \frac{\ln^{n+1}(x)}{n+1}.}$
b) On a $\boxed{\lim\limits_{+\infty} Z_n = +\infty, \text{ de plus si } n \text{ est pair, } \lim\limits_{0^+} Z_n = -\infty \text{ et sinon } \lim\limits_{0^+} Z_n = +\infty.}$

Partie B - Recherche de primitives

1. Posons $\alpha \neq -1$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \ln^{n+1}(t)$ et $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned} Z_{n+1}(x) &= \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^{n+1}(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{(n+1)\ln^n(t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^{\alpha+1}\ln^{n+1}(x)}{\alpha+1} - 0 - \frac{n+1}{\alpha+1}\int_1^x t^\alpha \ln^n(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}_+^*, \quad Z_{n+1}(x) = \frac{x^{\alpha+1}\ln^{n+1}(x) - (n+1)Z_n(x)}{\alpha+1}.}$
b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après ci-avant, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\frac{x^{\alpha+1}\ln^{k+1}(x)}{\alpha+1} = Z_{k+1}(x) + \frac{(k+1)Z_k(x)}{\alpha+1}$$

Multipliant par $\dfrac{(-1)^{k+1}(\alpha+1)^{k+1}}{(k+1)!}$ et par somme des égalités on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}(\alpha+1)^k x^{\alpha+1}\ln^{k+1}(x)}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}(\alpha+1)^{k+1}Z_{k+1}(x)}{(k+1)!}-\frac{(-1)^k(\alpha+1)^k Z_k(x)}{k!}$$

Une simplification téléscopique donne :

$$-x^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(\alpha+1)^k\ln^{k+1}(x)}{(k+1)!}=\frac{(-1)^n(\alpha+1)^n Z_n(x)}{n!}-Z_0(x)$$

On isole le termes $\dfrac{Z_n(x)}{n!}$ en multipliant par $\dfrac{1}{(-1)^n(\alpha+1)^n}$:

$$\begin{aligned}\frac{Z_n(x)}{n!}&=\frac{1}{(-1)^n(\alpha+1)^n}\frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}-x^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(-1)^n(\alpha+1)^n}\frac{(-1)^k(\alpha+1)^k\ln^{k+1}(x)}{(k+1)!}\\&=\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1}+\frac{(-1)^n x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{n+1}}-x^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n-k}\frac{\ln^{k+1}(x)}{(k+1)!}\end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice $\boxed{j=k+1}$:

$$=\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1}-\underbrace{\frac{(-1)^{n+1}x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{n+1}}}_{j=0}-x^{\alpha+1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-j}\frac{\ln^j(x)}{j!}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tous } n\in\mathbb{N} \text{ et } x\in\mathbb{R}_+^*\ ,\quad \frac{Z_n(x)}{n!}=\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1}-x^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}.}$

Autre approche : faire une récurrence.

2. Posons $\alpha\neq-1$, $n\in\mathbb{N}$ et $f\in\mathcal{N}_\alpha^n$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Il existe $(a_i)_{0\le i\le n}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)=x^\alpha\sum_{j=0}^{n}a_j\ln^j(x)$$

La primitive de f qui s'annule en 1 est :

$$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{j=0}^{n}a_j\int_1^x t^\alpha\ln^j(t)\mathrm{d}t=\sum_{j=0}^{n}a_jZ_j(x)$$

De plus, pour $j\in\mathbb{N}$, il existe $c_j\in\mathbb{R}$ telle que $Z_j-c_j\in\mathcal{N}_{\alpha+1}^j$ d'après B1b) avec $c_j=j!\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{j+1}$
Il vient :

$$G:x\mapsto F(x)-\sum_{j=0}^{n}a_jc_j=\sum_{j=0}^{n}a_j\underbrace{(Z_j(x)-c_j)}_{\in\mathcal{N}_{\alpha+1}^j}$$

On note que G est aussi une primitive de f. Comme $\mathcal{N}_{\alpha+1}^n$ est stable par addition et que pour $k\in[\![0,n]\!]$, $\mathcal{N}_{\alpha+1}^k\subset\mathcal{N}_{\alpha+1}^n$, alors $G\in\mathcal{N}_{\alpha+1}^n$.
Ainsi, $\boxed{\text{toute fonction élément de } \mathcal{N}_\alpha^n \text{ admet une primitive dans } \mathcal{N}_{\alpha+1}^n.}$

3. Posons $\alpha = -1$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{N}_{-1}^{n}$ continue sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$. Il existe $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\ln^k(x)}{x}$$

La primitive de f qui s'annule en 1 est :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_1^x \frac{\ln^k(t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\ln^{k+1}(x)}{k+1} \in \mathcal{N}_0^{n+1}$$

Ainsi, $\boxed{\text{toute fonction élément de } \mathcal{N}_{-1}^{n} \text{ admet une primitive élément de } \mathcal{N}_0^{n+1}.}$

Partie C - Résolution d'une EDL 1

1. On veut résoudre $(H_1)\ :\ y' + \dfrac{\alpha}{x} y = 0$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$ est $\alpha \ln$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{(H_1)} = \left\{ x \mapsto \lambda \exp(-\alpha \ln(x)) = \dfrac{\lambda}{x^\alpha}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$

2. a) Utilisons la méthode de variation de la constante. On cherche une solution particulière de la forme $g : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x^\alpha}$, il vient :

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (E_1) \quad &\Leftarrow \quad \forall x > 0, \quad x \frac{\lambda'(x)}{x^\alpha} = x \ln^n(x) \\ &\Leftarrow \quad \forall x > 0, \quad \lambda'(x) = x^\alpha \ln^n(x) \\ &\Leftarrow \quad \lambda = Z_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{une solution particulière de } (E_1) \text{ est } x \mapsto \dfrac{Z_n(x)}{x^\alpha}.}$

b) Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{(E_1)} = \left\{ x \mapsto \dfrac{\lambda + Z_n(x)}{x^\alpha}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$

Partie D - Résolution d'une EDL 2

1. a) $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ h(x) = k(\ln(x)).}$

b) $\boxed{\text{Pour } x > 0,\ h'(x) = \dfrac{k'(\ln(x))}{x} \text{ et } h''(x) = \dfrac{k''(\ln(x)) - k'(\ln(x))}{x^2}.}$

c) Comme exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$, il vient :

$$\begin{aligned} h \text{ est solution de } (E_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x > 0, \quad x^2 h''(x) + (1 - 2\alpha) x h'(x) + \alpha^2 h(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x > 0, \quad k''(\ln(x)) - k'(\ln(x)) + (1 - 2\alpha) k'(\ln(x)) + \alpha^2 k(\ln(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad k''(t) - 2\alpha k'(t) + \alpha^2 k(t) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{h \text{ est solution de } (E_2) \text{ ssi } k \text{ vérifie pour tout } t \in \mathbb{R},\ k''(t) - 2\alpha k'(t) + \alpha^2 k(t) = 0.}$

2. L'équation (E_3) est une EDL d'ordre 2. son équation caractéristique est $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 = (r - \alpha)^2$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{(E_3)} = \left\{ t \mapsto (\lambda + \beta t) e^{\alpha t} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}};\ \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right\}.}$

3. D'après les questions précédentes, on pose $t = \ln(x)$ on trouve

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_2)} = \left\{ x \mapsto (\lambda + \beta \ln(x)) \underbrace{e^{\alpha \ln(x)}}_{= x^\alpha} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_{+}^{*}};\ \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{N}_\alpha^1}$$