Fiche 7- Proposition de solutions

Solution 1 Correspondance entre différentes bases :

en base10	en base2	en base16
10	1010	A
2	10	2
16	10000	10
187	10111011	BB
23	10111	17
2025		

Solution 2 Numération en base b

```
def base(n,b):
    L=[]
    while n>0:
        L=[n%b]+L
        n=n//b
    if len(L)==0:
        L=[0]
    return L
```

Solution 3 Si $b = 2$ ces deux nombres sont égaux. Supposons maintenant que $b > 2$.

$$2(b-1) = b+(b-2) \quad \text{et} \quad (b-1)^2 = b^2-2b+1 = (b-2)b+1$$

Ainsi, ces deux nombres sont bien écrits avec les mêmes chiffres. Par exemple en base 10, cela donne 18 et 81.

Solution 4 Avec les notations de l'énoncé, la formule du binôme donne :

$$\left(\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}\right)_b = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k} = (b+1)^n = (11)_b^n$$

Solution 5

- On trouve que $8X^4+6X^2+2 = (2X^2+X+1)(4X^2-2X+2)$; donc $(a,b,c) = (4,-2,2)$.
- Évaluant ce polynôme pour $X = 9$, on obtient une factorisation en base 9 : $(211)_9$ divise $(80602)_9$.

Le quotient se détermine en écrivant en base 9 le nombre

$$4*9^2-2*9+2 = 3*9^2+7*9+2$$

Le quotient est $(372)_9$.

Solution 6 On note que $3*b^4 \approx 10^4+2*10^3 \quad \Rightarrow \quad b \approx 7{,}95$.
Essayons avec la base 8 :

$$(30407)_8 = 3*8^4+4*8^2+7 = 12551$$

Solution 7 Le problème se ramène à résoudre

$$(\star) \qquad 49x+7y+z = 81z+9y+x \text{ avec } x,y,z \in [0,6]$$

$$\begin{aligned}(\star) \quad &\Rightarrow \quad 48x = 2y+80z \quad \Rightarrow \quad 24x = y+40\\ &\Rightarrow \quad 24\wedge 40 = 8|y \quad \Rightarrow \quad y = 0\end{aligned}$$

On en déduit $x = 5$ et $z = 3$.
Ainsi, ce nombre est $(503)_7 = (305)_9 = (248)_{10}$.

Solution 8 Le problème se réduit à trouver

$$a,b,c \in [0,6]; \quad 11^3a+11^2b+11c+a = 7^3b+7^2b+7a+c \qquad (\star)$$

$$(\star) \quad \Rightarrow \quad 1325a+10c = 271b \quad \Rightarrow \quad 5|b \quad \Rightarrow \quad b \in \{0,5\}$$

- Si $b = 0$ alors il n'y a pas de solution.
- Si $b = 5$ alors on déduit $a = 1$ et $c = 3$.

Ainsi, ce nombre est $(1531)_{11} = (5513)_7 = (1970)_{10}$.

Solution 9 On remarque que $(x^4+x^3+2x^2+x+1)(i) = 0$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1|x^4+x^3+2x^2+x+1 \quad \Rightarrow \quad \forall b \geq 2,\ 101_b|11211_b$$

Ainsi ce nombre n'est jamais premier, quelle que soit la base que l'on considère.

Solution 10

Supposons que a s'écrit $(xyz)_{10}$, alors $\overleftarrow{a} = (zyx)_{10}$.
Quitte à échanger les notations x et z, on peut supposer $x > z$.
Ainsi,

$$b = xyz_{10} - zyx_{10} = (x-z-1)10^2+9*10+(z-x+10)$$

Donc $b+\overleftarrow{b} = 9*10^2+2*9*10+9 = 10*10^2+8*10+9 = 1089$.

Solution 11 ***Critères de divisibilité***

On considère que $n = \sum_{i=0}^{k} a_i b^i$ en base b.

- $2|1234x$: Comme $10 \equiv 0\ [2]$ alors $\boxed{2|n \quad \Leftrightarrow \quad 2|a_0}$.

Donc $x \in \{0,2,4,6,8\}$.

- $3|1x43x$: Comme $10 \equiv 1\ [3]$ alors $\boxed{3|n \quad \Leftrightarrow \quad 3|\sum a_i}$.

Donc $x \in \{1,4,7\}$.

- $4|32xx2$: Comme $10^2 \equiv 0\ [4]$ et $10 \equiv 4 = 2$ alors

$$\boxed{4|n \quad \Leftrightarrow \quad 4|a_0+2a_1}$$

Donc $x \in \{1,3,5,7,9\}$.

- $5|2x30$: Comme $10 \equiv 0\ [5]$ alors $\boxed{5|n \quad \Leftrightarrow \quad 5|a_0}$.

Donc x quelconque convient.

- $6|1x1x$: par 2 et par 3 $\boxed{6|n \quad \Leftrightarrow \quad 2|a_0 \text{ et } 3|\sum a_i}$.

Donc $x \in \{1,4,7\}$.

- $7|1070x$: Comme $10^3 \equiv -1\ [7]$ alors

$$\boxed{7|n \quad \Leftrightarrow \quad 7|\sum(-1)^i a_{3i+2}a_{3i+1}a_{3i}}$$

Donc $7|1070x \quad \Leftrightarrow \quad 7|70x-10 \quad \Leftrightarrow \quad 7|x-10 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$.

- $8|1x52$: Comme $10^3 \equiv 0\ [8]$, $10^2 \equiv 4\ [8]$ et $10 \equiv 2\ [8]$ alors

$$\boxed{8|n \quad \Leftrightarrow \quad 8|a_0+2a_1+4a_2}$$

Donc $x \in \{1,3,5,7,9\}$.

- $9|x345$: Comme $10 \equiv 1\ [9]$ alors $\boxed{9|n \quad \Leftrightarrow \quad 9|\sum a_i}$.

Donc $x = 6$.

- $11|1x43x$: Comme $10 \equiv -1\ [11]$ alors

$$\boxed{11|n \quad \Leftrightarrow \quad 11|\sum(-1)^i a_i}$$

Donc x quelconque convient.
• $3|(101011x00)_2$: Comme $2 \equiv -1$ [3] alors

$$\boxed{3|n_2 \quad \Leftrightarrow \quad 3|\sum(-1)^i a_i}$$

Donc $3|2-x$, c'est-à-dire $x=2$.
• $4|(3x3)_5$: Comme $5 \equiv 1$ [4] alors $\boxed{9|n \quad \Leftrightarrow \quad 9|\sum a_i}$.
Donc $x=6$.
• $10|(2x10)_3$: Comme $3^2 \equiv -1$ [10] alors

$$\boxed{10|n \quad \Leftrightarrow \quad 10|\sum(-1)^i a_{2i+1}a_{2i}}$$

Donc c'est impossible car il faudrait que $10|3+x$.
• $2|(6x5)_7$: Comme $7 \equiv 1$ [2] alors $\boxed{2|n \quad \Leftrightarrow \quad 2|\sum a_i}$.
Donc $x \in \{1,3,5\}$.
• $16|(x3x1)_7$: Comme $7^2 \equiv 1$ [16] alors

$$\boxed{16|n \quad \Leftrightarrow \quad 16|\sum a_{2i+1}a_{2i}}$$

Donc $x=2$.
• $4|(3xx)_6$: Comme $6^2 \equiv 0$ [4] alors $\boxed{4|n \quad \Leftrightarrow \quad 4|2a_1+a_0}$.
Donc $x \in \{0,4\}$.

Solution 12 Sur 6 bits, les nombres représentés sont $[\![-32,31]\!]$.

en base 10	méthode 1	Complément à 2
19	010011	010011
-19	110011	101101
-14	101110	110010
25	011001	011001
23	010111	010111
-1	100001	111111
-25	111001	X
-11	101011	X
-7	X	111001
-21	X	101011

Solution 13 L'addition dans la représentation binaire

Méthode 1 :

	010011	[19]
+	101110	[-14]
=	000001	[1]

Méthode 2 :

	010011	[19]
+	110010	[-14]
=	000101	[5]

La représentation des nombres entiers relatifs par la méthode 2 du complément à 2 est compatible avec l'addition contrairement à celle de la méthode 1.

Solution 14 On travaille avec une représentation sur n bits et a,b tels que $a+b \in [\![-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]\!]$. Procédons par disjonction de cas :
• si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors la sommes des représentations donne celle de $a+b$;
• si $a \geq 0$ et $b < 0$ alors la la sommes des représentations donne $2^n + a + b \equiv a+b$ $[2^n]$ qui est bien la représentation de $a+b$;
• si $a < 0$ et $b < 0$ alors la la sommes des représentations donne $2^n + 2^n + a + b \equiv 2^n + a + b$ $[2^n]$ qui est bien la représentation de $a+b$.