Corrigé du DM 11

Méthode de Newton

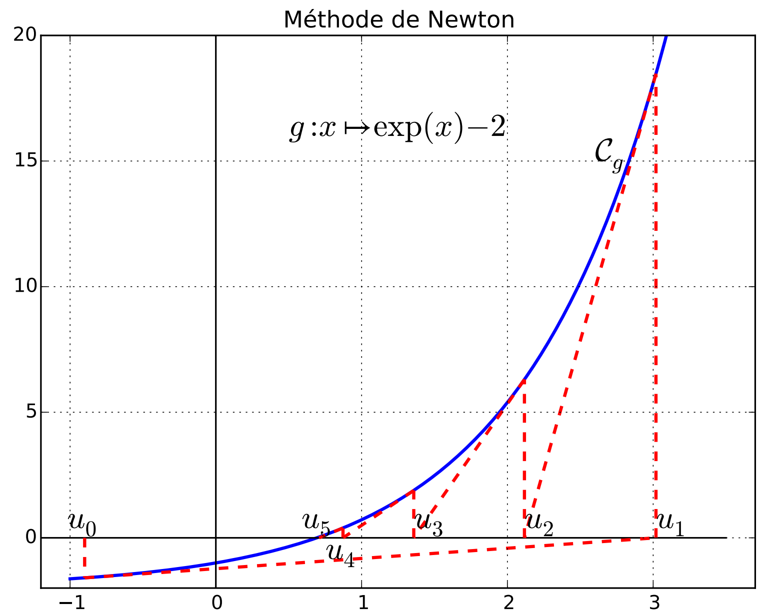
1. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $\alpha, \beta \in I$ tel que $\alpha < \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Comme l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha, \beta]$, le théorème de Rolle donne l'existence de $c \in]\alpha, \beta[$ tel que $f'(c) = 0$. Ceci contredit l'hypothèse (2) $f' > 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la racine de } f \text{ est unique.}}$
Autre approche : Comme $f' > 0$, f est strictement croissante, donc injective d'où l'unicité de l'antécédent de 0.
2. a) L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$, en $(x_0, f(x_0))$ est :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

b) L'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de f en $(x_0, f(x_0))$ avec l'axe des abscisses est obtenue lorsque l'ordonnée est nulle :

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

c) Représenter graphiquement de la suite induite par la méthode de Newton : il convient de considérer la courbe d'une fonction qui satisfait les conditions ; prenons $x \mapsto \exp(x) - 2$; de plus, on identifie que la relation de récurrence correspond à celle obtenue en 2b) ; ainsi, connaissant u_n, le nombre u_{n+1} est le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en u_n et l'axe des abscisses.



$\boxed{\text{La suite semble converger vers, } \alpha, \text{ la racine de la fonction.}}$

3. a) Soit $x, t \in I$, il y a trois situations à traiter :

- si $x = t$, l'inégalité à montrer devient $f(x) \geq f(x)$ qui est vraie.
- si $x < t$; l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, t]$.

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, il existe $c \in]x, t[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(c)$$

Or l'hypothèse (3), $f'' \geq 0$, donne que f' est croissante et donc $f'(c) \leq f'(t)$. Il vient :

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \leq f'(t) \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(t) \geq f'(t)(x - t) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(t) + f'(t)(x - t)$$

- si $x > t$; avec une démarche similaire, la croissance de f' donne que $f'(c) \geq f'(t)$. Il vient :

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq f'(t) \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(t) \geq f'(t)(x - t) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(t) + f'(t)(x - t)$$

Ainsi, $\boxed{\forall x, t \in I, \quad f(x) \geq f(t) + f'(t)(x - t).}$

Autre approche : Soit $t \in I$, posons $\varphi : x \mapsto f(x) - \big(f(t) + f'(t)(x - t)\big)$.
Alors $\varphi(t) = \varphi'(t) = 0$ et $\varphi''(x) = f''(x) \geq 0$ alors :

x		t	
$\varphi''(x)$	$+$		$+$
$\varphi'(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

x		t	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
$\varphi(x)$	$+$	0	$+$

Ainsi, $\boxed{\forall x, t \in I, \quad f(x) \geq f(t) + f'(t)(x - t).}$

Autre approche : Comme $f'' > 0$ donc f est convexe et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus des ses tangentes ...

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, évaluons la relation obtenue en 3a) en $x = \alpha$ et $t = u_n$ (supposant $u_n \neq \alpha$) :

$$0 = f(\alpha) \geq f(u_n) + f'(u_n)(\alpha - u_n) \quad \Rightarrow_{[\text{avec } f'>0]} \quad 0 \geq \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} + \alpha - u_n \quad \Rightarrow \quad \underbrace{u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}}_{u_{n+1}} \geq \alpha$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq \alpha}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

De plus, d'après l'hypothèse (2), f est croissante, donc : $\alpha \leq u_n \quad \Rightarrow \quad 0 = f(\alpha) \leq f(u_n)$.

Donc $\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \geq 0$ et $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par α ; le théorème de limite monotone donne que la suite converge. Notons ℓ sa limite.

On a $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et par opérations algébriques et composition sur les limites :

$$u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

L'unicité de la limite donne que ℓ vérifie $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$ c'est à dire $f(\ell) = 0$.

D'après l'hypothèse (1) et le résultat obtenue en 1), on obtient $\ell = \alpha$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \alpha.}$

4. **Application informatique en PYTHON :**

a) La fonction `derive(f,a)` qui retourne une approximation de $f'(a)$:

```
def derive(f,a):
    h=1e-10
    return (f(a+h)-f(a))/h
```

b) Script d'une fonction `newton` :

```
def newton(f,u0,n):
    u=u0
    for i in range(1,n+1):
        u=u-f(u)/derive(f,u)
    return u
```

c) Considérons l'application $g : x \mapsto \exp(x) - 2$

(i) Vérification des hypothèses :

(0) g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I = \mathbb{R}$;

(1) on a : $g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(2)$. Donc g s'annule en $\ln(2)$.

(2) sa dérivée, $g' = \exp$ est strictement positive sur I ;

(3) sa dérivée seconde, $g'' = \exp$ est positive sur I.

Ainsi, $\boxed{g \text{ vérifie les hypothèses (1), (2) et (3) de la méthode de Newton.}}$

(ii) Application à la fonction g avec $u_0 = 1$:

```
g=lambda x:np.exp(x)-2

for i in range(1,6):
    u=newton(g,1,i)
    print('n =',i,'-> Un =',u,' avec une precision de : '
                    , abs(u-np.log(2)))
```

n	u_n	$\lvert u_n - \ln(2)\rvert$
2	0.6940424	0.0009
3	0.6931476	4.10^{-7}
4	0.6931472	5.10^{-14}
5	0.6931472	0 ou plutôt 10^{-16}

Attention ! La représentation des nombres réels par la machine induit une approximation de la valeur. PYTHON utilise 16 chiffres (52 bits) pour représenter *la mantisse* qui sont les "premiers" chiffres significatifs. Cela a plusieurs conséquence :

- La précision des calculs ne peut excéder cette contrainte.
- Le test d'égalité de deux nombres réels pose donc aussi un problème :

```
>>> a=3*0.1;b=0.3;a==b
False
>>> a=1+10**(-17);a==1
True
```

Pour corriger ce problème, un test d'égalité convenable entre deux nombres à virgule est `abs(a-b)<1e-15` :

```
 --> a=3*0.1;b=0.3;abs(a-b)<1e-15
True
```

5. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $h : x \mapsto x^2 - r$.
a) h s'annule en $\sqrt{r}$ avec $h' : x \mapsto 2x > 0$ et $h'' = 2 \geq 0$.
Ainsi, $\boxed{h \text{ vérifie les hypothèses de la méthode de Newton sur } \mathbb{R}_+^*.}$
b) La suite récurrente associée est pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - r}{2u_n} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{r}{u_n}\right)$$

c) La fonction `rc(r,n)` :

```
def rc2(r,n):
    u=1
    for i inrange(1,n+1):
        u=(u+r/u)/2
    return u
```

d) La fonction `rc2(r,p)` nécessite de travailler sur deux termes consécutifs de la suite pour mettre en place le test d'arrêt, d'où les deux variables :

```
def rc2(r,p):
    u=1
    v=(u+r/u)/2
    while abs(u-v)>p:
        u,v=v,(v+r/v)/2
    return v
```