DM 12

à rendre le mercredi 21 février 2025

Les nombres de Fermat

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Conjecture : Fermat a conjecturé en 1640 que tous les (F_n) étaient premiers, formulant l'espoir d'avoir trouvé une suite décrivant une partie infinie de $\mathbb{P}$.

$$F_0 = 3 \qquad F_1 = 5 \qquad F_2 = 17 \qquad F_3 = 257 \qquad F_4 = 65\ 537 \qquad F_5 = 4\ 294\ 967\ 297$$

1. Introduction des nombres de Fermat :
a) Soient a et n deux entiers naturels. Montrer que $a^{2n+1} + 1$ est divisible par $a + 1$.
b) En déduire que si $n = k2^p$, où k naturel impair et p naturel, alors $2^n + 1$ est divisible par $2^{2^p} + 1$.
c) En déduire que si $2^q + 1$ est premier alors q est une puissance de 2.
2. Les nombres de Fermat sont premiers entre eux deux à deux (théorème de Goldbach) :
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, F_n divise $F_{n+k} - 2$.
b) Montrer que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $m \neq n \quad \Rightarrow \quad F_m$ et F_n sont premiers entre eux.
3. Recherche sur la forme de diviseurs premiers de F_n :
a) Considérant a et q premiers entre eux, notons $(\mathcal{E})$: $a^k \equiv 1\ [q]$.
Le petit théorème de Fermat donne l'existence d'entiers k vérifiant $(\mathcal{E})$ (en particulier $k = q - 1$).
Notant k_0 le plus petit entier (non nul) vérifiant $(\mathcal{E})$, montrer que tout entier k vérifiant $(\mathcal{E})$ est un multiple de k_0.

Considérons p un diviseur premier de F_n.
b) Montrer que 2^{n+1} est le plus petit entier m vérifiant $2^m \equiv 1\ [p]$.
c) Justifier que $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$.
d) En déduire qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^{n+1} \times j + 1$
e) Montrer, de plus, que j possède un diviseur impair supérieur à 3, c'est à dire que j n'est pas une puissance de 2.
f) Sous quelle forme doit on chercher un diviseur premier de F_5 ?
Combien de tentatives sont nécessaire pour trouver un diviseur non trivial de F_5 ?
Remarque : C'est Euler, qui, le premier, a démontrer que F_5 n'est pas premiers en proposant une factorisation. Depuis, aucun nombre premier n'a pu être exhibé dans cette suite (pour $n \geq 5$).
4. Quelques propriétés des nombres de Fermat :
a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$
b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} - 2 = F_n(F_n - 2)$
c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$
d) Montrer que pour $n \geq 2$ le chiffre des unités de F_n est 7.
e) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n divise $2^{F_n} - 2$.