DM 13

à rendre le mardi 4 février 2025

Formule de Stirling

Partie A - Intégrale de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \, \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.

2. a) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.

3. a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$

b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0$

4. a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq W_{n+1} \geq \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

b) En déduire que $W_{n+1} \sim W_n$, puis que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

En déduire l'équivalent de $\dbinom{2n}{n}$. (Cet équivalent est appelé **formule de Wallis**).

Partie B - Formule de Stirling

On note, pour tout entier $n \geq 1$: $A_n = \dfrac{1}{n!}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

On note, pour tout entier $n \geq 2$: $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

6. Considérons la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\right)$ pour $n \geq 2$:

a) Donner un équivalent de a_n.

b) En déduire qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{6n^2} \leq \dfrac{1}{6n(n-1)} = \dfrac{1}{6(n-1)} - \dfrac{1}{6n}$.

c) Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\right)$ est croissante à partir d'une certain rang et majorée.

d) En déduire que la suite converge.

7. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

8. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

9. a) Justifier que $n! \sim \dfrac{1}{\ell}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

b) En utilisant la formule de Wallis, en déduire que $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. **Prog**