

# Colle 19

Les questions "★" sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

## EXTRAIT DU PROGRAMME

### 1. ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

#### A. ESPACES VECTORIELS

##### A. ESPACES VECTORIELS

Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$ , $\mathbb{K}[X]$ , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$ , cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

#### B. SOUS-ESPACES VECTORIELS

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droites vectorielles. Plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ . Sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$ .
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie $A$ .	Notations $\text{Vect}(A)$ , $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ . Tout sous-espace contenant $A$ contient $\text{Vect}(A)$ .

#### C. FAMILLES DE VECTEURS

Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libres, liées.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , $\mathbb{K}_n[X]$ , $\mathbb{K}[X]$ . Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ .

#### D. SOMME D'UN NOMBRE FINI DE SOUS-ESPACES

Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$ est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

## MÉTHODES ET SAVOIR-FAIRE

- Mettre en oeuvre le pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire (formalisme matriciel possible).
- Montrer qu'un ensemble est un sous  $\mathbb{K}$ -e.v.
- Montrer qu'une famille est libre, liée, génératrice, une base.
- Identifier une famille échelonnée en coordonnées.
- Extraire une base d'une famille génératrice.
- Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Manipuler l'intersection et la somme de sous-espaces vectoriels

**QUESTIONS DE COURS**

→ Exemples  $\mathbb{K}$ -e.v. fondamentaux. Règles de calcul. Notion de combinaison linéaire. Les deux caractérisations d'un sous-espace vectoriel.

→ Notation  $\text{Vect}(X)$ . Propriétés dont :

- $\text{Vect}(X)$  plus petit sous-e.v. contenant  $X$
- si  $X \subset Y$  alors  $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$
- si  $x \in \text{Vect}(X)$  alors  $\text{Vect}(X \cup \{x\}) = \text{Vect}(X)$
- si  $x \in \text{Vect}(X \cup \{y\})$  tel que  $x$  se décompose comme une combinaison linéaire dont le coefficient de  $y$  est non nul, alors  $\text{Vect}(X \cup \{x\}) = \text{Vect}(X \cup \{y\})$
- $\text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y) = \text{Vect}(X \cup Y)$

→ Notion de famille génératrice de  $E$ , famille libre, famille liée, famille échelonnée (exemples), base, coordonnées, base canonique (exemples).

★  $y \in \text{Vect}(X) \Leftrightarrow \text{Vect}(X \cup \{y\}) = \text{Vect}(X)$ . Autrement dit, une famille reste génératrice lorsque qu'on lui retire un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs.

→ Définition d'une famille libre. Propriétés liées à une famille libre  $X$  :

- si  $Y \subset X$  alors  $Y$  est libre,
- si  $x \in \text{Vect}(X)$  alors la décomposition de  $x$  comme une combinaison linéaire de  $X$  est unique,
- si  $y \notin \text{Vect}(X)$ , alors  $X \cup \{y\}$  est libre

Donner des exemples de familles libres et de techniques pour établir qu'une famille est libre.

★ Soit  $x \in \text{Vect}(X)$  avec  $X$  une famille libre, alors la décomposition de  $x$  comme une combinaison linéaire de  $X$  est unique.

→ Définition d'une famille liée. Propriétés d'une famille liée  $X$  :

- un vecteur de la famille se décompose comme une combinaison linéaire des autres,
- si  $X \subset Y$  alors  $Y$  est liée,
- une famille contenant le vecteur nul est liée

Donner des exemples de familles liées.

★ Montrer que la famille  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et donner les coordonnées de  $u$  dans cette base.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

★ Considérons  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a - b & a + b + 2c + d \\ a + c + d & b + c \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

Montrer que  $F$  est un sous-e.v. de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et en donner une base.

→ Somme de deux sous-espace vectoriels, notion de somme directe.

Caractérisations d'une somme directe par l'intersection et par la juxtaposition de bases.

Notion d'espaces supplémentaires et caractérisations.

★ Caractérisations d'une somme directe par l'intersection et par la juxtaposition de bases.

★ Donner une base de  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_1 \cap E_2$  et  $E_1 + E_2$  avec :

$$E_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \end{cases} \right\} \quad E_2 = \text{Vect}((1, 1, 1, -1); (1, 0, 1, 0))$$