Colle 16

Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Extrait du programme

Polynômes et fractions rationnelles

a. Anneau des polynômes à une indéterminée

Anneau $\mathbb{K}[X]$.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Degré d'une somme, d'un produit.	L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
Composition.	

b. Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.

c. Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Multiplicité d'une racine.	
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formule de Viète).	Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement.

d. Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.	
Formule de Taylor polynomiale.	
Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	

f. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauß.	La démonstration est hors programme.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ ont même multiplicité.

g. Formule d'interpolation de Lagrange

Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que$P(x_i) = y_i$ pour tout i.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i.

Méthodes et savoir-faire

- Calcul du reste d'une division euclidienne
- Utiliser la multiplicité en lien entre la divisibilité et la dérivation
- Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

Questions de cours

➜ Considérant les polynômes sous la notation somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, définir les notions de monôme, degré, $\mathbb{K}_n[X]$, coefficient, coefficient dominant, polynômes dérivés, propriété d'intégrité.
Donner les propriétés sur le degré, la formule du produit.

★ Donner la définition de la divisibilité et le thèorème de la division euclidienne.
Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On désirer calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer $A^2 - 5A + 4I_3$.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 4$.

c) En déduire l'expression de A^n en fonction de A et de I_3.

➜ Racine d'un polynôme, multiplicité. Caractérisation en terme de divisibilité et grâce aux polynômes dérivés.
Lien entre le degré et le nombre de racines. Lien entre multiplicité et polynômes dérivés.

➜ Polynôme scindé. Théorème de d'Alembert-Gauss et son corollaire. Théorème de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

➜ Méthode de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
Propriétés liées à une racine complexe d'un polynôme à coefficients réels.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

★ Préciser les relations entre coefficients et racines.
En particulier, pour un polynôme scindé de degré n, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad\qquad \sigma_n = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Donner un exemple issu du TD ou du cours.

★ Établir le théorème d'interpolation de Lagrange.
Donner un exemple d'interpolation avec au moins 3 points.

★ Formule de Taylor