DM 14

à rendre le mardi 11 février 2025

Polynômes d'Hermite

On note $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $w(x) = e^{-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n le polynôme dont la fonction associée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x),$$

où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de w.

En particulier : $H_0 = 1$.

1. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.
Faire figurer les calculs sur la copie.

2. a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.

c) Contrôler alors les résultats obtenus à la première question et calculer H_4.
Faire figurer les calculs sur la copie.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application associée à H_n ?