Corrigé du DM 14

Polynômes d'Hermite

On note que la fonction w est de classe C^∞, comme composée de la fonction exp et d'un polynôme.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $w'(x) = -2xe^{-x^2}$, donc

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} w'(x) = -e^{x^2}\left(-2xe^{-x^2}\right) = 2x.$$

De plus $w''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2-2)e^{-x^2}$, donc

$$\begin{array}{rcl} H_2(x) & = & (-1)^2 e^{x^2} w''(x) \\ & = & e^{x^2}\left(4x^2-2\right)e^{-x^2} \\ & = & 4x^2-2 \end{array}$$

Enfin $w'''(x) = 8xe^{-x^2} - 2x(4x^2-2)e^{-x^2} = (-8x^3+12x)e^{-x^2}$, donc

$$\begin{array}{rcl} H_3(x) & = & (-1)^3 e^{x^2} w'''(x) \\ & = & -e^{x^2}(-8x^3+12x)e^{-x^2} \\ & = & 8x^3-12x \end{array}$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2-2 \text{ et } H_3(x) = 8x^3-12x}$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Dérivons la relation qui donne H_n (c'est possible, car w est C^∞, donc $w^{(n)}$ aussi, de plus $x \mapsto e^{x^2}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$) :

$$\begin{array}{rcl} H_n'(x) & = & (-1)^n 2xe^{x^2} w^{(n)}(x) + (-1)^n e^{x^2} w^{(n+1)}(x) \\ & = & 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \end{array}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)}$.

b) Montrons par récurrence sur n : H_n est un polynôme réel de degré n.

Initialisation : H_0 est un polynôme de degré 0, puisque c'est le polynôme constant égal à 1.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons que H_n est un polynôme réel de degré n.
Alors par produit, $2XH_n$ est aussi un polynôme réel, et par dérivation H_n' aussi. Ainsi, en additionnant, on obtient bien que H_{n+1} est un polynôme réel.
Considérons maintenant que $\deg(H_n) = n$. Alors

— $\deg(2XH_n) = \deg(2X) + \deg(H_n) = 1 + n$ et

— $\deg(H_n') \leq \deg(H_n) - 1 = n - 1$.

Donc, comme $\deg(2XH_n) > \deg(H_n')$, on peut affirmer que

$$\deg(2XH_n - H_n') = \max\left(\deg(2XH_n), \deg(H_n')\right) = n+1$$

Donc H_{n+1} est bien de degré $n+1$. D'où l'hérédité.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.

c) Comme $H_0 = 1$, il vient

$$\begin{aligned}
H_1 &= 2XH_0 - H_0' = 2X \times 1 - 0 = 2X \\
H_2 &= 2XH_1 - H_1' = 2X \times 2X - 2 = 4X^2 - 2 \\
H_3 &= 2X(4X^2 - 2) - (8X) = 8X^3 - 12X \\
H_4 &= 2X(8X^3 - 12X) - (24X^2 - 12) = 16X^4 - 48X^2 + 12
\end{aligned}$$

On trouve $\boxed{H_4 = 16X^4 - 48X^2 + 12}$.

3. Notons $cd(H_n)$ le coefficient dominant de H_n. Comme $\deg(H_n') < \deg(2XH_n)$,

$$cd(H_{n+1} = cd(2XH_n - H_n') = cd(2XH_n) = 2cd(H_n)$$

On reconnait donc une suite géométrique, et comme $cd(H_0) = 1$, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ cd(H_n) = 2^n}$.

4. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ H_n(-x) = (-1)^n H_n(x),$$

Initialisation : pour $n = 0$, $H_0(-x) = 1$, et $(-1)^0 H_0(x) = 1 \times 1 = 1$, donc c'est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

On peut alors dériver cette égalité de fonction, et on obtient (en dérivant $H_n(-x)$ comme une fonction composée !) que

$$-H_n'(-x) = (-1)^n H_n'(x),$$

soit $H_n'(-x) = (-1)^{n-1} H_n'(x) = (-1)^{n+1} H_n'(x)$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a (par la formule de la question 2.a.) :

$$\begin{array}{rcl}
H_{n+1}(-x) & = & 2(-x)H_n(-x) - H_n'(-x) \\
 & = & 2(-x)(-1)^n H_n(x) - (-1)^{n+1} H_n'(x) \\
 & = & (-1)^{n+1}\left[2xH_n(x) - H_n'(x)\right] \\
 & = & (-1)^{n+1} H_{n+1}(x)
\end{array}$$

d'où la formule au rang $n + 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)}$.

$\Rrightarrow$ *On peut aussi montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w^{(n)}(-x) = (-1)^n w^{(n)}(x)$*

Ceci se traduit par : pour $n \in \mathbb{N}$,

- H_n est une fonction paire si n est un entier pair,
- H_n est une fonction impaire si n est un entier impair.