Proposition de corrigé du devoir surveillé 7

Exercice 1 - Suite récurrence linéaire

1. a) $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,u_{n+2} - 5\,u_{n+1} + 2\,u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = A\,X_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

b) On a $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

où le coefficient $(1,3)$ est obtenu par : $3 \times 2 + (-5) \times 0 + 2 \times (-1) = 4$.

Et $(A-I)^2(A-2I) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Ainsi, $\boxed{(A-I)^2(A-2I) = 0.}$

2. a) Le <u>théorème de la division euclidienne</u> montre que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, il existe un couple (Q_n, R_n) d'éléments de $\mathbb{R}[X]^2$, et un seul, tel que :

$$\begin{cases} X^n = P\,Q_n + R_n \\ \deg(R_n) < \deg(P) = 3 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X];\ X^n = P\,Q_n + R_n.}$

b) Déterminons a_n, b_n et c_n tel que $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

- évaluons la relation précédent en 1 : $1^n = 0 + a_n + b_n + c_n$
- évaluons la relation précédent en 2 : $2^n = 0 + 4a_n + 2b_n + c_n$
- dérivons la relation et évaluons la en 1 : $n1^{n-1} = 0 + 2a_n + b_n$ car $P(1) = P'(1) = 0$

Ainsi, a_n, b_n et c_n vérifie :

$$\begin{cases} \boxed{a_n} & +b_n & +c_n & = 1 \\ 4a_n & +2b_n & +c_n & = 2^n \\ 2a_n & +b_n & & = n \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_n & +b_n & +c_n & = 1 \\ & \boxed{-2b_n} & -3c_n & = 2^n - 4 \\ & -b_n & -2c_n & = n - 2 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2a_n & & -c_n & = 2^n - 2 \\ & -2b_n & -3c_n & = 2^n - 4 \\ & & \boxed{-c_n} & = 2n - 2^n \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2a_n & & & = 2^{n+1} - 2n - 2 \\ & -2b_n & & = 2^{n+2} - 6n - 4 \\ & & c_n & = 2^n - 2n \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{R_n = (2^n - n - 1)X^2 + (2 + 3n - 2^{n+1})X + 2^n - 2n.}$

3. a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Comme $P(A) = 0$, nous avons,

$$A^n = (P\,Q_n + R_n)(A) = P(A)\,Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A)$$

Ainsi, $A^n = R_n(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n I$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (2^n - n - 1)A^2 + (2 + 3n - 2^{n+1})A + (2^n - 2n)I.}$

b) Les troisièmes lignes de I, A et A^2 sont respectivement : $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0^*\end{pmatrix}$ (détail $0^* = 0\times 2 + 1\times 0 + 0\times 0$)
Alors la troisième ligne de A^n est :

$$(2^n-2n)\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}+(2+3n-2^{n+1})\times\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}+(2^n-n-1)\times\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^n-n-1 & 2+3n-2^n & 2^n-2n\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \text{ la troisième ligne de } A^n \text{ est } (2^n-n-1, 2+3n-2^{n+1}, 2^n-2n).}$

4. a) Montrons par <u>récurrence</u> que $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n = A^n\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

- <u>Initialisation :</u> pour $n=0$, $A^0 = I$, donc la relation est vérifiée.
- <u>Hérédité :</u> Soit $n\geq 0$. Supposons la propriété vraie au rang n

$$X_{n+1} = A\,X_n = A\,A^n\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = A^{n+1}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

- <u>Conclusion :</u> $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ X_n = A^n\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.}$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$, $\begin{pmatrix}u_{n+2}\\u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix} = X_n = A^n\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Ainsi u_n est le produit de la troisième ligne de A_n avec $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Par conséquent : $u_n = (2^n-n-1)\times 1+(-2^{n+1}+3\,n+2)\times 1+(2^n-2\,n)\times 0 = 2^n-2\times 2^n+2\,n+1 = -2^n+2\,n+1$.
Ainsi, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = -2^n+2\,n+1}$.

Exercice 2 - Densité et structure algébrique

1. Soit $y \in f(I)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
La continuité de f en x donne qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f\big(I \cap [x-\alpha, x+\alpha]\big) \subset [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$.
Or A est dense dans I donc il existe $a \in A \cap I \cap [x-\alpha, x+\alpha]$ et donc $f(a) \in [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$.
Ainsi, $\boxed{f(A) \text{ est dense dans } f(I).}$
Autre approche : Mettre en place la caractérisation séquentielle de la densité.
Soit $y \in f(I)$, alors il existe $x \in I$.
Par densité de A dans I alors il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
Par continuité de f en x, alors $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in f(A)^{\mathbb{N}}$ converge vers y.
Ainsi, par caractérisation séquentielle de la densité, $f(A)$ est dense dans $f(I)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. De plus $0 = a \times 0 \in a\mathbb{Z}$ donc $a\mathbb{Z} \neq \emptyset$.
Enfin, pour $ak, ak' \in a\mathbb{Z}$ alors $ak + (-ak') = a(k-k') \in a\mathbb{Z}$.
Ainsi, par caractérisation d'un sous groupe, $\boxed{a\mathbb{Z} \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R},+).}$
3. Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ différent de $\{0\}$.
a) Soit $x \in G \cap \backslash\{0\}$ alors $-x \in G$ et donc $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est une partie réelle non vide et minorée par 0 donc elle possède une borne inférieure, notée b.
b) Soit $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$. A fortiori $b > 0$. Montrons que $G = b\mathbb{Z}$.

$\boxed{\supset}$ Par itération de la loi de composition interne $b\mathbb{N} \subset G$; leurs opposés sont aussi dans G donc $b\mathbb{Z} \subset G$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in G$. Posons $q = \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor$ alors

$$q \leq \frac{x}{b} < q+1 \quad \Rightarrow \quad qb \leq x < qb + b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x - qb < b$$

Or $x, b \in G$ et $q \in \mathbb{Z}$ donc $qb \in G$ et pour finir $x - qb \in G \cap \mathbb{R}_+$. Comme $b = \inf\big(G \cap \mathbb{R}_+^*\big)$ alors $x - qb = 0$ donc $x = qb \in b\mathbb{Z}$. Ainsi, $G \subset b\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } b \in G \cap \mathbb{R}_+^*, \text{ alors } G \subset b\mathbb{Z}.}$
c) Soit $b \notin G \cap \mathbb{R}_+^*$. Montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, $b + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc il existe $y_1 \in]b, b+\varepsilon[\cap G$.
De même, y_1 n'est pas non plus un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc il existe $y_2 \in]b, y_1[\cap G$. Il vient :

$$b < y_2 < y_1 < b + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_2 < y_1 < b + \varepsilon \\ -y_2 \leq -y_2 \leq -b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < y_1 - y_2 < \varepsilon$$

Comme $y_1, y_2 \in G$ alors $\alpha = y_1 - y_2 \in G$. Posons $q = \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor$ alors

$$q \leq \frac{x}{\alpha} < q+1 \quad \Rightarrow \quad q\alpha \leq x < q\alpha + \alpha$$

Or $\alpha < \varepsilon$ et comme $q\alpha \leq x$ alors $q\alpha + \alpha < x + \varepsilon$ par somme d'inégalités. Donc

$$x < (q+1)\alpha < x + \varepsilon$$

De plus, par itération de la loi de composition interne, $(q+1)\alpha \in G \cap \mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.
Considérant les opposés, alors $G \cap \mathbb{R}_-^*$ est dense dans $\mathbb{R}_-$.
Ainsi, $\boxed{\text{si } b \notin G \cap \mathbb{R}_+^*, \text{ alors } G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$

Remarque – Si $b \notin G \cap \mathbb{R}_+^*$ alors $b = 0$.
Formuler ce résultat n'est pas directement utile pour répondre à la question de la densité.

Néanmoins il se déduit de ce qui a été fait en prenant $\varepsilon = b$.
En effet, raisonnant par l'absurde, supposant $b > 0$, alors $y_1 - y_2 \in G \cap]0, b[$ ce qui est contradictoire.

d) Si $G = \{0\}$ alors $G = 0\mathbb{Z}$. Sinon, nous venons de voir que soit $G = b\mathbb{Z}$ soit G est dense dans $\mathbb{R}$.
Ainsi, $\boxed{\text{les sous groupes de } (\mathbb{R}, +) \text{ sont soit de la forme } a\mathbb{Z} \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+, \text{ soit dense dans } \mathbb{R}.}$

4. On a $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. De plus, $1 = 1 + 2\pi \times 0 \in \mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ donc $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z} \neq \emptyset$.
Enfin, pour $a + 2b\pi, c + 2d\pi \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ alors $a + 2b\pi + (-c - 2d\pi) = a - c + 2\pi(b - d) \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.
Ainsi, par caractérisation d'un sous groupe, $\boxed{\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}, +).}$

5. Montrons par l'absurde que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Supposons la négation vraie ; d'après ce qui précède, il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$.
D'une part, $1 \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $1 = bk$ c'est-à-dire que $b = \dfrac{1}{k} \in \mathbb{Q}$.
D'autre part, $\pi \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}^*$ tel que $2\pi = bk'$ et donc $\pi = \dfrac{bk'}{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux par hypothèse.
Ainsi, $\boxed{\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$

6. Procédons par double inclusion. D'une part :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos(\mathbb{N}) \subset \cos\big(\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}\big) \subset \cos\big(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\big)$$

D'autre part, considérons $x \in \cos\big(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\big)$ donc il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = \cos(a + 2b\pi) = \cos(a) = \cos(-a) \in \cos(\mathbb{N})$$

Donc $\cos\big(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\big) \subset \cos(\mathbb{N})$.
Ainsi, $\boxed{\cos\big(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\big) = \cos\big(\mathbb{N} + \pi\mathbb{Z}\big) = \cos(\mathbb{N}).}$

7. La fonction $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
De plus, $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc $\cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$ est dense dans $[-1, 1]$.
Or $\cos\big(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\big) = \cos\big(\mathbb{N}\big)$, donc $\boxed{\cos(\mathbb{N}) \text{ est dense dans } [-1, 1].}$

8. Soit $x \in [-1, 1]$. Montrons qu'il existe une fonction strictement croissante de $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\Big(\cos\big(\varphi(n)\big)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.
Posons $\varphi(0) = 0$. Procédons par récurrence pour établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on peut construire $\varphi(n)$ tel que $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $|\cos\big(\varphi(n)\big) - x| \leq \dfrac{2}{n}$.

- <u>Initialisation :</u> Posons $\varphi(1) = 1$ avec $1 > \varphi(0)$.
Comme $\cos\big(\varphi(1)\big), x \in [-1, 1]$ alors $\cos\big(\varphi(1)\big) - x \in [-2, 2]$ et donc $|\cos\big(\varphi(1)\big) - x| \leq \dfrac{2}{1}$.
- <u>Hérédité :</u> Soit $n \geq 1$. On suppose $\big(\varphi(n)$ construit.
Considérons $K = \left([-1, 1] \cap \left[x - \dfrac{2}{n+1}, x + \dfrac{2}{n+1}\right]\right) \setminus \{\cos(j) ; j \in [\![0, \varphi(n)]\!]\}$.
L'ensemble K est une réunion finie d'intervalles. Alors il existe $a, b \in [-1, 1]$ tel que $[a, b] \subset K$.
La densité de $\cos(\mathbb{N})$ dans $[-1, 1]$ donne qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\cos(N) \in [a, b] \subset K$.
Par construction de K on a les propriétés suivantes :
  - $N > \varphi(n)$, on peut pose $\varphi(n+1) = N$
  - $\cos(N) \in K \subset \left[x - \dfrac{2}{n+1}, x + \dfrac{2}{n+1}\right]$ donc $|\cos(N) - x| \leq \dfrac{2}{n+1}$
- <u>Conclusion :</u> il existe une fonction $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$|\cos\big(\varphi(n)\big) - x| \leq \frac{2}{n}$$

Or $\dfrac{2}{n} \to 0$ donc $\cos\big(\varphi(n)\big) \to x$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe une suite extraite de } \Big(\cos(n)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } x.}$

Exercice 3 - La constante $\zeta(2)$

1. a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$; la formule de Moivre donne :

$$\begin{aligned}
\sin\big((2n+1)t\big) &= \operatorname{Im}(e^{(2n+1)t}) = \operatorname{Im}\big((e^t)^{2n+1}\big) = \operatorname{Im}\big((\cos(t)+i\sin(t))^{2n+1}\big) \\
&\qquad \text{Formule du binôme} \\
&= \operatorname{Im}\Big(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i\sin(t))^k\cos(t)^{2n+1-k}\Big) \\
&= \operatorname{Im}\Big(\sum_{2k\in[\![0,2n+1]\!]}\binom{2n+1}{2k}(-1)^k\sin(t)^{2k}\cos(t)^{2n+1-2k} \\
&\qquad + i\sum_{2k+1\in[\![0,2n+1]\!]}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin(t)^{2k+1}\cos(t)^{2n-2k}\Big) \\
&= \sum_{2k+1\in[\![0,2n+1]\!]}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin(t)^{2k+1}\cos(t)^{2n-2k}
\end{aligned}$$

Seules les puissances impaires de i restent imaginaires.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \sin\big((2n+1)t\big) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}t\cos^{2(n-k)}t.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 1a), pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin^{2n+1}(t)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\frac{\cos^{2(n-k)}(t)}{\sin^{2n+1-2k-1}(t)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\text{cotan}^{2(n-k)}(t)$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\text{ posons } P_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^kX^{n-k} \in \mathbb{R}[X]}$, alors

$$(\bigstar)\quad \forall\, t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad P_n\big(\text{cotan}^2(t)\big) = \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons P_n et un autre polynôme Q_n vérifiant $(\bigstar)$.
Donc pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$P_n\big(\text{cotan}^2(t)\big) = Q_n\big(\text{cotan}^2(t)\big) \quad\Rightarrow\quad (P_n - Q_n)\big(\text{cotan}^2(t)\big) = 0$$

Or cotan réalise un bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi cotan^2 aussi (car $x \mapsto x^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$).
Il vient :

$$\forall x > 0,\quad (P_n - Q_n)(x) = 0$$

Le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines, donc il est nul, c'est-à-dire : $P_n = Q_n$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe un unique polynôme } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ vérifiant } (\bigstar)}$.

d) On note que le terme dominant de P_n est $\binom{2n+1}{1}(-1)^0X^n = (2n+1)X^n$, donc $\deg(P_n) = n$.

$$\text{Pour } t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin^{2n+1}(t)} = 0 \quad\Leftarrow\quad t \in \left\{\frac{k\pi}{2n+1}; k \in [\![1,n]\!]\right\} \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Ceci donne n valeurs deux à deux distinctes. Comme cotan^2 réalise un bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors $\left\{\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right); k \in [\![1,n]\!]\right\}$ sont n racines deux à deux distinctes de P_n.

Comme P_n, de degré n, possède au plus n racines, alors on les connaît toutes.

Ainsi, $\boxed{\text{les racines de } P_n \text{ sont } \left\{\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) ; k \in [\![1, n]\!]\right\}}$

2. a) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- Initialisation : soit $n = 1$, $Q = a_1X + a_0 = a_1(X - x_1)$ avec $a_1 \neq 0$. On identifie que $x_1 = -\dfrac{a_0}{a_1}$.

La relation est vraie au rang 1.

- Hérédité : soit $n \geq 1$, on suppose que la relation est vraie pour un polynôme de degré n.

Considérons un polynôme de degré $n+1$ ($a_{n+1} \neq 0$) :

$$Q = a_{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (X - x_k) = a_{n+1}(X - x_{n+1}) \overbrace{\prod_{k=1}^{n} (X - x_k)}^{R}$$

Avec la notation : $R = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - x_k) = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ (avec $b_n = 1$).

Par hypothèse de récurrence on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{b_{n-1}}{1} = -b_{n-1}$

Développons Q pour considérer ses deux coefficients dominants :

$$Q = a_{n+1}\Big(\sum_{j=0}^{n} b_j X^{j+1} - x_{n+1} \sum_{j=0}^{n} b_j X^j\Big)$$

Le coefficient de X^{n+1} est : $a_{n+1}b_n = a_{n+1}$

Le coefficient de X^n est : $a_{n+1}\left(b_{n-1} - x_{n+1}b_n\right) = a_{n+1}\Big(\Big(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) - x_{n+1}\Big)$

Donc $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k$: la relation est vérifiée au rang $n+1$.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $Q \in \mathbb{R}[X]$ alors

$$Q = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

b) D'après 1b) on déduit les deux coefficients dominants de $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k X^{n-k}$:

Coefficient de X^n pour $(k = 0)$: $a_n = \binom{2n+1}{1} = 2n+1$

Coefficient de X^{n-1} pour $(k = 1)$: $a_{n-1} = -\binom{2n+1}{3} = -\dfrac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = -\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$

Ainsi, $\boxed{-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} = \dfrac{n(2n-1)}{3} \text{ est la somme des racines de } P_n}$ d'après 2b).

3. a) Considérons $g : t \mapsto t - \sin(t)$ et $h : t \mapsto \tan(t) - t$ définies sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Les applications sont dérivables et $\begin{cases} g'(t) = 1 - \cos(t) \geq 0 \\ h'(t) = 1 + \tan^2(t) - 1 = \tan^2(t) \geq 0 \end{cases}$

Les applications sont croissante. De plus $g(0) = h(0) = 0$, donc elles sont positives.

Ainsi, $\boxed{\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin(t) \leq t \leq \tan(t).}$

Sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, sin est strictement positive et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned} 0 < \sin(t) \leq t \leq \tan(t) \quad & \Rightarrow \quad \frac{1}{\tan^2(t)} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{\sin^2(t)} \\ & \Rightarrow \quad \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{\sin^2(t)} \\ & \Rightarrow \quad \operatorname{cotan}^2(t) \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2(t) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \operatorname{cotan}^2(t) \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2(t).}$

b) D'après 2b) et 1d), on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{n(2n-1)}{3} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

De plus, d'après 3a), pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1$$

Par sommation des inégalités, on obtient :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \frac{n(2n-1)}{3} + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \frac{n(2n-1)}{3} + n}$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après 3b) on a

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{n(2n-1)}{3} + n$$

En divisant l'inégalité ci-dessus par $\frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2}$ on obtient :

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \left(\frac{n(2n-1)}{3} + n\right) \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$$

Or $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim \frac{2n^2\pi^2}{12n^2} \sim \frac{\pi^2}{6}$ et de même $\left(\frac{n(2n-1)}{3} + n\right) \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sim \frac{\pi^2}{6}$.

Par <u>encadrement</u> $\boxed{\text{la suite } \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) \text{ converge et a pour limite } \frac{\pi^2}{6}.}$

Problème - Décomposition en *éléments simples* des nombres rationnels ❄❄❄

Partie A - Existence de la décomposition

1. Par construction, les facteurs premiers constituants les $(q_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ sont les $(p_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$.
Pour $i \in [\![1,k]\!]$, $p_i \wedge q_i = 1$, donc les $(q_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ sont premiers dans leur ensemble.
Ainsi, l'identité de Bezout donne $\boxed{\text{il existe } u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } u_1q_1 + u_2q_2 + \cdots + u_kq_k = 1.}$

2. En multipliant l'égalité précédente par $\frac{a}{b}$: $x = \frac{au_1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{au_2}{p_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{au_k}{p_k^{\alpha_k}}$

Ainsi, $\boxed{\text{il existe } v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{v_1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{v_2}{p_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{v_k}{p_k^{\alpha_k}} : \forall i \in [\![1,k]\!] \quad v_i = au_i.}$

3. Pour $i \in [\![1,k]\!]$ la division euclidienne de v_i par $p_i^{\alpha_i}$ donne l'existe d'un quotient $e_i \in \mathbb{Z}$ et d'un reste $r_i \in [\![0, p_i^{\alpha_i} - 1]\!]$. On pose $e \sum_{i=1}^{k} e_i \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $\boxed{x = e + \frac{r_1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{r_2}{p_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{r_k}{p_k^{\alpha_k}}}$

4. L'écriture de r en base p donne l'existence des *chiffres* $a_1, a_2, \ldots a_\alpha \in [\![0, p-1]\!]$ tel que

$$r = a_k + a_{k-1}p + a_{k-2}p^2 + \cdots + a_1p^{k-1} \quad \text{et donc} \quad \boxed{y = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_\alpha}{p^\alpha}}$$

5. En appliquant la décomposition du 4) à chaque fraction du 3), on trouve une décomposition en éléments simples de x.

Partie B - Unicité de la décomposition

1. Par regroupement des fractions, on identifie par une démarche inverse à celle de 5) que r_i se décompose en base p_i sur α_i chiffres et donc $r_i \in [\![0, p_i^{\alpha_i} - 1]\!]$. Résultat similaire sur s_i.
Pour $i \in [\![1,m]\!]$, il y a quatre cas à considérer :

- il existe $j \in [\![1,k]\!]$ tel que $P_i = p_j$, alors $\frac{r_j}{p_j^{\alpha_j}} = \frac{a_i}{P_i^{E_i}}$ avec $\alpha_j \leq E_i$.

Comme $r_i \in [\![0, p_i^{\alpha_i} - 1]\!]$, alors $a_i = r_jP_i^{E_i-\alpha_j} \leq (p_i^{\alpha_i} - 1)P_i^{E_i-\alpha_j} = P_i^{E_i} - P_i^{E_i-\alpha_j} \leq P_i^{E_i} - 1$.

- pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $p_j \neq P_i$ alors $a_i = 0$
- il existe $j \in [\![1,\ell]\!]$ tel que $P_i = q_j$, alors de façon similaire $b_i \in [\![0, P_i^{E_i} - 1]\!]$.
- pour tout $j \in [\![1,\ell]\!]$, $q_j \neq P_i$ alors $b_i = 0$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1,m]\!],\ a_i, b_i \in [\![0, P_i^{E_i} - 1]\!].}$

2. On note que $Dx = a_1Q_1 + a_2Q_2 + \cdots + a_mQ_m = b_1Q_1 + b_2Q_2 + \cdots + b_mQ_m$.
Soit $i \in [\![1,m]\!]$, considérons l'égalité précédente par congruence modulo $P_i^{E_i}$. Comme pour tout $j \in [\![1,m]\!] \backslash \{i\}$, $P_i^{E_i}$ divise Q_j alors :

$$Dx \equiv a_iQ_i \equiv b_iQ_i \;\left[P_i^{E_i}\right]$$

Or $Q_i \wedge P_i^{E_i} = 1$ par définition de Q_i ; donc, d'après le théorème de Gauss : $a_i \equiv b_i \;\left[P_i^{E_i}\right]$.
Comme $a_i, b_i \in [\![0, P_i^{E_i} - 1]\!]$ alors $\boxed{a_i = b_i.}$

3. Ayant établi l'égalité des $a_i = b_i$, il vient que

$$e = x - \frac{a_1}{P_1^{E_1}} - \frac{a_2}{P_2^{E_2}} - \cdots - \frac{a_m}{P_m^{E_m}} = x - \frac{b_1}{P_1^{E_1}} - \frac{b_2}{P_2^{E_2}} - \cdots - \frac{b_m}{P_m^{E_m}} = f$$

4. D'après ce qui précède et par l'unicité de la représentation d'un entier dans une base, il vient que les deux décompositions en éléments simples sont identiques (à l'ordre près des termes).

Partie C - Applications

1. Décomposition en éléments simples de rationnels :

$\Rrightarrow$ Décomposition de $x_1 = \dfrac{47}{36} = \dfrac{47}{2^2 \times 3^2}$

- $U_1 = 9$ et $U_2 = 4$, l'identité de Bezout donne : $1 = 1 \times 9 - 2 \times 4$
- Il vient $\dfrac{47}{36} = \dfrac{47 \times 9}{36} - \dfrac{94 \times 4}{36} = \dfrac{47}{2^2} - \dfrac{94}{3^2} = 11 + \dfrac{3}{2^2} - 11 + \dfrac{5}{3^2} = 11 + \dfrac{2+1}{2^2} - 11 + \dfrac{3+2}{3^2}$
- Ainsi, $\boxed{x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2}.}$

$\Rrightarrow$ Décomposition de $x_2 = -\dfrac{5}{48} = -\dfrac{5}{2^4 \times 3}$

- $U_1 = 3$ et $U_2 = 16$, l'identité de Bezout donne : $1 = -5 \times 3 + 1 \times 16$
- Il vient $-\dfrac{5}{48} = \dfrac{25 \times 3}{48} - \dfrac{5 \times 16}{48} = \dfrac{25}{2^4} - \dfrac{5}{3} = 1 + \dfrac{9}{2^4} - 2 + \dfrac{1}{3} = 1 + \dfrac{8+1}{2^4} - 2 + \dfrac{1}{3}$
- Ainsi, $\boxed{x_2 = -1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3}.}$

$\Rrightarrow$ Décomposition de $x_3 = \dfrac{314}{715} = \dfrac{314}{5 \times 11 \times 13}$

- $U_1 = 143$, $U_2 = 65$ et $U_3 = 55$. Par identité de Bezout successives :

$$13 = 1 \times 143 - 2 \times 65 \text{ et } 1 = 17 \times 13 - 4 \times 55 \text{ donc } 1 = 17 \times 143 - 34 \times 65 - 4 \times 55$$

- Il vient $\dfrac{314}{715} = \dfrac{314 \times 17}{5} - \dfrac{314 \times 34}{11} - \dfrac{314 \times 4}{13} = 1067 + \dfrac{3}{5} - 971 + \dfrac{5}{11} - 97 + \dfrac{5}{13}$
- Ainsi, $\boxed{x_3 = -1 + \dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{11} + \dfrac{5}{13}.}$

2. Les outils d'arithmétique Python :

```
def base(n,b=2):
    if n==0: L=[0]
    else: L=[]
    while n>0:
        L.append(n%b)
        n=n//b
    return L[::-1]
```

```
def Bezout(a,b):
    u,v,uu,vv=1,0,0,1
    while b!=0:
     q,r=a//b,a%b
     u,v,uu,vv=uu,vv,u-q*uu,v-q*vv
     a,b=b,r
    return u,v,a
```

```
def base10(L,b=2):
    n=0
    m=1
    for e in L[::-1]:
        n,m=n+m*e,m*b
    return n
```

```
def valuation(p,n):
    assert n>0,'ENC'
    a=0
    while n%p==0:
        n,a=n//p,a+1
    return a
```

```
def dfp(n):
    assert n>1,'ENC'
    L=[]
    p=2
    while p*p<=n:
        a=valuation(p,n)
        if a>0:
            L.append([p,a])
            n=n//p**a
        p=p+1
    if n>1:
        L.append([n,1])
    return L
```

3. Fonction `ss_des(v,p,k)` qui décompose en éléments simples $\dfrac{v}{p^k}$ où $v \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:
   - on effectue la division euclidienne de v par p^k : $v = ep^k + r$
   - on cherche l'écriture de r en base p : $r = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} c_i p^i$
   - on ajoute les zéros, à gauche, pour obtenir une liste de k chiffres
   - le résultat attendu est $e, [p, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0]$ car $\dfrac{r}{p^k} = \dfrac{c_{k-1}}{p} + \cdots + \dfrac{c_1}{p^{k-1}} + \dfrac{c_0}{p^k}$

```
def ss_des(v,p,k):
    r=v%(p**k)
    e=(v-r)//(p**k)
    L=base(r,p)
    L=(k-len(L))*[0]+L # penser à ajouter des zéros
    return e,[p]+L
```

4. Fonction `des(n,d)` qui décompose en éléments simples la fraction $\dfrac{n}{d}$:

```python
def des(n,d):
    F=dfp(d)
    if len(F)==1:
        return list(ss_des(n,F[0][0],F[0][1]))
    Q=[d//(e[0]**e[1]) for e in F]
    U=len(Q)*[0]
    u,v,a=Bezout(Q[0],Q[1])
    U[0],U[1]=u,v
    for i in range(2,len(Q)):
        u,v,a=Bezout(a,Q[i])
        U[i]=v
        for j in range(i):
            U[j]=U[j]*u
    U=[n*e for e in U]
    D=[0]
    for i in range(len(U)):
        e,L=ss_des(U[i],F[i][0],F[i][1])
        D[0]=D[0]+e
        D.append(L)
    return D
```

5. Fonction `des_r(D)` qui retourne le nombre rationnel associé à la décomposition en éléments simples représentée par la liste `D` :

```python
def des_r(D):
    P=[D[i][0]**(len(D[i])-1) for i in range(1,len(D))]
    d=1
    for e in P:
        d=d*e
    Q=[d//e for e in P]
    U=[base10(e[1:],e[0]) for e in D[1:]]
    n=D[0]*d
    for i in range(len(Q)):
        n=n+U[i]*Q[i]
    return n,d
```