DS 7

Mercredi 5 février 2025 – durée : 4 h

Exercice 1 - Suite récurrence linéaire

On rappelle que que pour $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m \text{ ou } I \text{ désigne la matrice identité de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Donner la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
   b) Vérifier que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.
2. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = (X-1)^2(X-2)$.
   a) Justifier l'existence et l'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ X^n = PQ_n + R_n$$
   b) Déterminer a_n, b_n et c_n tel que $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$.
3. a) Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n en fonction de I, A et A^2.
   b) Pour n de $\mathbb{N}$ donner la troisième ligne de la matrice A^n.
4. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$ avec X_0 à préciser.
   b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice 2 - Densité et structure algébrique ❄ ❄

Objectif : Montrer que $\{\cos(n);\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

On admet que π est irrationnel.

1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et A une partie dense dans I.
   Montrer que $f(A)$ est dense dans $f(I)$.
2. Montrer que pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
3. Dans cette question, nous voulons montrer que les sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$, soit dense dans $\mathbb{R}$. Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$.
   a) Justifier que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide est possède une borne inférieure, notée b.
   b) Si $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, montrer que $G = b\mathbb{Z}$.
   c) Si $b \notin G \cap \mathbb{R}_+^*$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
   d) Conclure.
4. Montrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

5. Montrer que $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
6. Montrer que $\cos\big(\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}\big)=\cos\big(\mathbb{N}+2\pi\mathbb{Z}\big)=\cos(\mathbb{N})$.
7. En déduire que le résultat cherché.
8. Montrer que pour tout $x\in[-1,1]$, il existe une suite extraite de $\Big(\cos(n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

Exercice 3 - La constante $\zeta(2)$

Pour tout $t\in]0,\pi[$, on pose : $\operatorname{cotan}(t)=\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$.

On admettra que cotan réalise une bijection de $\Big]0,\dfrac{\pi}{2}\Big[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. a) Montrer pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$ l'égalité suivante :
$$\sin\big((2n+1)t\big)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}(t)\cos^{2(n-k)}(t).$$
   b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant :
$$(\bigstar)\quad \forall\, t\in\Big]0,\frac{\pi}{2}\Big[,\quad P_n\big(\operatorname{cotan}^2(t)\big)=\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$
   c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est l'unique polynôme vérifiant $(\bigstar)$.
   d) Déterminer les racines de P_n.
2. a) Montrer par récurrence que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, si Q est un polynôme de degré n s'écrivant sous les formes suivantes :
$$Q=a_n\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$$
   alors $x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.
   b) En déduire que la somme des racines de P_n est : $S_n=\dfrac{n(2n-1)}{3}$.
3. a) Montrer que, pour tout $t\in\Big[0,\dfrac{\pi}{2}\Big[$, $\sin(t)\le t\le\tan(t)$.
   En déduire, pour tout $t\in\Big]0,\dfrac{\pi}{2}\Big[$, $\operatorname{cotan}^2(t)\le\dfrac{1}{t^2}\le 1+\operatorname{cotan}^2(t)$.
   b) Montrer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ l'encadrement suivant :
$$\frac{n(2n-1)}{3}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{\pi^2k^2}\le n+\frac{n(2n-1)}{3}.$$
   c) En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Problème - Décomposition en *éléments simples* des nombres rationnels ❄ ❄ ❄

Définition – Élément simple

Un rationnel r est un élément simple *si $r\in\mathbb{Z}$ ou si $r=\dfrac{a}{p^k}$ avec p un nombre premier, $k\ge 1$ et $a\in[\![0,p-1]\!]$.*

Théorème – Tout nombre rationnel non nul s'écrit de manière unique (à l'ordre des termes près) comme somme d'éléments simples non nuls.

Exemple :

- $\dfrac{34}{7} = 4 + \dfrac{6}{7}$ $\quad \dfrac{34}{9} = 3 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{9}$ $\quad -\dfrac{34}{9} = -4 + \dfrac{2}{9}$
- $\dfrac{2020}{2021} = \dfrac{32}{43} + \dfrac{12}{47}$ $\quad \dfrac{2021}{2020} = -1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{96}{101}$

Partie A - Existence de la décomposition

Soit $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note $b = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la factorisation première de b.

1. Pour $j \in [\![1, k]\!]$, on pose $q_j = \dfrac{b}{p_j^{\alpha_j}} = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Montrer qu'il existe $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$u_1 q_1 + u_2 q_2 + \cdots + u_k q_k = 1$$
2. Montrer qu'il existe $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$x = \frac{v_1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{v_2}{p_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{v_k}{p_k^{\alpha_k}}$$
3. Montrer qu'il existe $e \in \mathbb{Z}$ et $r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $r_j \in [\![0, p_j^{\alpha_j} - 1]\!]$ et
$$x = e + \frac{r_1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{r_2}{p_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{r_k}{p_k^{\alpha_k}}$$
4. Montrer que si $y = \dfrac{r}{p^\alpha}$ avec $p \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, p^\alpha - 1]\!]$ alors il existe $a_1, a_2, \dots a_\alpha \in [\![0, p-1]\!]$ tel que
$$y = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_\alpha}{p^\alpha}$$
5. En déduire l'existence de la décomposition.

Partie B - Unicité de la décomposition

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Supposons qu'il existe deux écritures de décomposition en éléments simples. Quitte à regrouper les éléments simples associés au même facteur premier, x s'écrit :
$$x = e + \frac{r_1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{r_2}{p_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{r_k}{p_k^{\alpha_k}} = f + \frac{s_1}{q_1^{\beta_1}} + \frac{s_2}{q_2^{\beta_2}} + \cdots + \frac{s_\ell}{q_\ell^{\beta_\ell}}$$
avec $e, f \in \mathbb{Z}$, pour $i \in [\![1, k]\!]$, $p_i \in \mathbb{P}$, $r_i \in [\![0, p_i^{\alpha_i} - 1]\!]$ et pour $j \in [\![1, \ell]\!]$, $q_j \in \mathbb{P}$, $s_j \in [\![0, q_j^{\beta_j} - 1]\!]$. Quitte à introduire des termes nuls, on peut supposer que la famille des nombre premiers utilisés dans les deux écritures est la même :

- on prend la réunion des deux listes de nombres premiers utilisés : $P_1, P_2, \dots, P_m \in \mathbb{P}$;
- on introduit de nouveaux coefficients (éventuellement nuls) et exposants pour conserver les écritures, en particulier $E_i = \max(\alpha_j, \beta_n)$ si $P_i = p_j = q_n$:
$$x = e + \frac{a_1}{P_1^{E_1}} + \frac{a_2}{P_2^{E_2}} + \cdots + \frac{a_m}{P_m^{E_m}} = f + \frac{b_1}{P_1^{E_1}} + \frac{b_2}{P_2^{E_2}} + \cdots + \frac{b_m}{P_m^{E_m}}$$

On pose $D = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} P_i^{E_i}$

1. Montrer que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $a_i, b_i \in [\![0, P_i^{E_i} - 1]\!]$.
2. Soit $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $Q_i = \dfrac{D}{P_i^{E_i}}$. On considérant Dx, montrer $a_i = b_i$.
3. Montre que $e = f$.
4. En déduire l'unicité de la décomposition.

Partie C - Applications

1. Déterminer la décomposition en éléments simples des rationnels suivants (détailler les calculs) :

$$x_1 = \frac{47}{36} \qquad x_2 = -\frac{5}{48} \qquad x_3 = \frac{314}{715}$$

2. Donner le script des fonctions suivantes :
   (i) `base(n,b)` qui retourne la liste $[\dots, c_2, c_1, c_0]$ des chiffres de l'écriture de `n` dans la base `b` tel que
   $$n = \sum_i c_i b^i$$
   (ii) `base10(L,b)` qui retourne le nombre (en base 10) dont l'écriture en base `b` est donnée dans la liste `L` sous la forme $[\dots, c_2, c_1, c_0]$.
   (iii) `Bezout(a,b)` qui retourne un triplet `u,v,d` tel que $ua + vb = a \wedge b$
   (iv) `valuation(p,n)` qui retourne la valuation `p`-adique de `n` : $\max(k \in \mathbb{N}, \quad n \equiv 0\ [p^k])$
   (v) `dfp(n)` qui retourne la décomposition de la factorisation première de `n` sous la forme
   $$[[p_1, \alpha_1], [p_2, \alpha_2], [p_3, \alpha_3], \dots] \text{ avec } n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$$

3. Écrire une fonction `ss_des(v,p,k)` qui décompose en éléments simples $\dfrac{v}{p^k}$ où $v \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
   En particulier, si $\dfrac{v}{p^k} = e + \dfrac{a_1}{p} + \dfrac{a_2}{p^2} + \dots + \dfrac{a_k}{p^k}$ avec $e \in \mathbb{Z}$ et $a_1, a_2, \dots a_k \in [\![0, p-1]\!]$, alors la fonction retourne l'entier `e` et la liste `[p,`a_1`,`a_2`, ...,`a_k`]` de longueur `k+1` exactement (quitte à ajouter des zéros).
4. Soit la fraction $\dfrac{n}{d}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}^*$ de décomposition en éléments simples de la forme :

$$\frac{n}{d} = e + \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_1^2} + \dots + \frac{a_{\alpha_{p_1}}}{p_1^{\alpha_{p_1}}} + \frac{b_1}{p_2} + \frac{b_2}{p_2^2} + \dots + \frac{b_{\alpha_{p_2}}}{p_2^{\alpha_{p_2}}} + \dots$$

   On définit sa représentation en PYTHON par la liste :
   `[e,[`p_1`,`a_1`,`a_2`, ..., `$a_{\alpha_{p_1}}$` ],[`p_2`,`b_1`,`b_2`, ..., `$b_{\alpha_{p_2}}$`], ... ]`

   Exemple :
   - $\dfrac{34}{7} = 4 + \dfrac{6}{7} \rightarrow$ `[4, [7, 6]]` $\qquad \dfrac{34}{9} = 3 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{9} \rightarrow$ `[3, [3, 2, 1]]`
   - $\dfrac{2021}{2020} = -1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{96}{101} \rightarrow$ `[-1, [2, 0, 1], [5, 4], [101, 96]]`

   Écrire une fonction `des(n,d)` qui décompose en éléments simples la fraction $\dfrac{n}{d}$ en retournant sa représentation définie ci-avant.
5. Écrire une fonction `des_r(D)` qui retourne le nombre rationnel associé à la décomposition en éléments simples représentée par la liste `D`.