DS 7

Mercredi 5 février 2025 – durée : 1 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice supplémentaire - Suite récurrente d'ordre 2

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+2} = \dfrac{1}{3}x_{n+1} + \dfrac{1}{3}x_n$.
   Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Soient $(a, b) \in ([1, +\infty[)^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
   $u_0 = a$, $u_1 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et vérifie : $u_n \geq 1$.
   b) Montrer que la seule limite finie possible pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 4.
3. On se propose d'établir la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'étude d'une suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.
   a) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.
   b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.
   En déduire que $|v_{n+2}| \leq \dfrac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$.
   c) On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|v_n| \leq x_n$ et conclure.