Proposition de corrigé du devoir surveillé 7

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une <u>relation de récurrence linéaire d'ordre deux</u>.

— son équation caractéristique est : $3r^2 - r - 1 = 0$

— le discriminant associé est : $\Delta = 1 + 4 \times 3 \times -1) = 13$

— les racines sont $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

— il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^n$$

On note que $\left|\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\right| \leq \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \leq \dfrac{1+\sqrt{16}}{6} = \dfrac{1+4}{6} = \dfrac{5}{6} < 1$.

Ainsi $r_1, r_2 \in]-1,1[$ donc $r_1^n \to 0$ et $r_2^n \to 0$. Par opération algébrique sur les limites de suites convergentes, $x_n \to 0$.

Ainsi $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.

2. a) Montrer que la suite est bien définie revient à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{D}_{\sqrt{\ }}$. Il suffit donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

Procédons par <u>récurrence d'ordre deux</u> sur $n \in \mathbb{N}$:

- Initialisation : u_0 et u_1 sont donnés et $u_0 = a \geq 1$ et $u_1 = b \geq 1$.
- Hérédité : Soit $n \geq 0$. On suppose que u_n et u_{n+1} sont définis et que $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$. Par croissante de $t \mapsto \sqrt{t}$, on a $\sqrt{u_n} \geq \sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{u_{n+1}} \geq 1$. Ainsi,

$$\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \geq 1 + 1 \geq 1$$

  Ainsi $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$ est bien défini et $u_{n+2} \geq 1$.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini et vérifie : } u_n \geq 1}$.

b) Supposons que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $u_{n+1} \to \ell$ et $u_{n+2} \to \ell$.

D'après 2a), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$. <u>Par passage à la limite</u>, on obtient $\ell \geq 1$.

Comme la <u>fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue</u> en ℓ, alors $\sqrt{u_n} \to \sqrt{\ell}$. Par somme de limite finie, on a $\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \to 2\sqrt{\ell}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$; <u>par unicité de la limite</u> ℓ vérifie :

$$\ell = 2\sqrt{\ell} \text{ (et } \ell \geq 1) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\ell} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 4$$

Ainsi, $\boxed{\text{la seule limite finie possible pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est } 4}$.

3. a) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n = (2(v_n+1))^2 = 4(v_n+1)^2$$

Or $t \mapsto 4(t+1)^2$ est un polynôme, continue en 0, donc si $v_n \to 0$ alors $u_n \to 4(0+1) = 4$.

Ainsi $\boxed{\text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons $v_{n+2} \times 2(2+v_{n+2})$:

$$\begin{aligned}
v_{n+2} \times 2(2+v_{n+2}) &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}}-1\right)2(2+\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}}-1) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}}-1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}}+1\right) \\
&= 2\left(\frac{u_{n+2}}{4}-1\right) \text{ par une identité remarquable} \\
&= \frac{\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n}}{2}-2 \text{ par définition de } (u_n) \\
&= \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2}-1+\frac{\sqrt{u_n}}{2}-1 \\
&= v_{n+1}+v_n \text{ par défintion de } (v_n)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+2} = \frac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 2a), $u_n \geq 1$. La croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ donne

$$\sqrt{u_n} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad v_n \geq \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(2+v_{n+2}) \geq 2\left(2-\frac{1}{2}\right) = 3$$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \frac{1}{2(2+v_{n+2})} \leq \frac{1}{3}$.

L'inégalité triangulaire donne :

$$|v_{n+2}| = \left|\frac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}\right| \leq \frac{|v_{n+1}|+|v_n|}{2(2+v_{n+2})} \leq \frac{|v_{n+1}|+|v_n|}{3}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|)}$.

c) Procédons par récurrence d'ordre deux sur $n \in \mathbb{N}$:

- Initialisation : $|v_0| = x_0 \leq x_0$ et $|v_1| = x_1 \leq x_1$
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
|v_{n+2}| &\leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|) \text{ d'après 3b)} \\
&\leq \frac{1}{3}(x_{n+1}+x_n) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&\leq x_{n+2} \text{ par définition de } (x_n)
\end{aligned}$$

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq x_n}$.

Or (x_n) converge vers 0, d'après 1), ainsi par encadrement la suite (v_n) converge aussi vers 0. Il vient d'après 3a) que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 4}$.