DM 15

à rendre le mardi 4 mars 2025

Méthode $p-1$ de factorisation de Pollard

Partie A - Arithmétique

1. Montrer le **petit théorème de d'Euler** : Soit p, q deux nombres premiers distincts et $n = pq$.

a) Montrer que si a est premier avec p et q, alors $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ [n]$.

b) Généralisation : Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $a^{k(p-1)(q-1)+1} \equiv a\ [n]$.

c) Soit $e, d \in \mathbb{Z}$ tel que $ed \equiv 1\ [(p-1)(q-1)]$. Montrer que pour tout $x \in [\![0, n-1]\!]$,

$$x \equiv x^{de}\ [n]$$

2. Combien de chiffre contient l'écriture binaire de m^k où m et k sont des nombres s'écrivant sur 1024 bits ? Sachant que l'univers observable contient de l'ordre de 10^{80} atomes, que pensez vous du calcul de m^k ?

3. Considérer l'algorithme suivant :

Prog

```
1  def algo(x,d):
2      r,m,p=1,x,d
3      while d!=0:
4          if p%2==1:
5              r=r*m
6          m,p=m*m,p//2
7      return r
```

a) Suivre dans un tableau le contenu des variables ou expression lors de l'exécution de `algo(-2,13)` :

`r`	`m`	`p`	`p%2` (test lig.4)
...	...	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮

Une ligne par boucle ; les valeurs étant données au début de chaque boucle.

b) Conjecturer la valeur retournée par `algo` en fonction de `x` et `n`.

c) Proposer une version récursive de cette fonction, `algo_R(x,d)`, et former le tableau suivant le contenu des variables lors de l'exécution de `algo_R(-2,13)`.

4. En adaptant la fonction précédente, proposer une fonction `ERM(x,d,n)`, qui calcule $y \equiv x^d\ [n]$ en ne manipulant que des entiers inférieurs à n^2 : c'est l'algorithme de ***l'exponentiation rapide modulaire***.

Définition – Entier b-friable
Soit $b \in \mathbb{N}$. On dit qu'un entier $k \in \mathbb{N}^*$ est b-friable si ses facteurs premiers sont inférieurs à b.

5. Soit k un entier b-friable et α le maximum de ses valuations p-adique.
Montrer que k divise $(\alpha \times b)!$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{P}$, avec $p > 3$, un facteur premier de n et $B \in \mathbb{N}$ tel que $B!$ soit un multiple de $p-1$.
On pose a le reste de la division euclidienne de $3^{B!}$ par n.

a) Montre que $a \equiv 3^{B!}\ [p]$.

b) Justifier que $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et en déduire que $a \equiv 1\ [p]$.

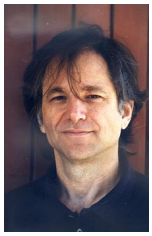
c) En déduire que p est un diviseur de $a-1$.

d) En déduire que p divise $(a-1) \wedge n$.

Partie B - Chiffrement RSA


R. Rivest (1947-)


A. Shamir (1952-)


L. Adelman (1945-)

⇛ Phase 1 - **Pour recevoir des messages,** Bob crée sa clé secrète et sa clé publique.
(i) Il choisit deux grands nombres premiers p et q dont il calcule le produit n : $n = pq$
(ii) Il choisit un nombre d premier avec $(p-1)(q-1)$: c'est la *clé de chiffrement.*
(iii) Il calcule e, la *clé de déchiffrement* telle que : $de \equiv 1\ [(p-1)(q-1)]$
(iv) Bob garde **secrets** p, q et e et **publie** ses "*coordonnées*" n et d.

⇛ Phase 2 - Alice **veut envoyer un message chiffré** à Bob.
(i) Elle regarde dans l'annuaire (public) et trouve les coordonnées n et d de Bob.
(ii) Elle convertit son message en nombres plus petits que n (voir TP numérisation d'un fichier texte)
(iii) Elle chiffre chaque nombre, x, en calculant $y \equiv x^d\ [n]$.
(iv) Elle envoie ensuite les nombres y à Bob.

⇛ Phase 3 - Bob **déchiffre le message** d'Alice.
(i) Il déchiffre chaque nombre, y, en calculant $z \equiv y^e\ [n]$ (le résultat du 1c) donne que $z = x$).
(ii) Il reconstitue le message à partir des nombres z.

On suppose posséder les fonction suivante :
- `numerise(f1,f2,n)` : elle considère un fichier de caractères, `f1`, le converti en bloc de nombres de $[\![0, n-1]\!]$, et enregistre un nombre par ligne dans le fichier `f2` ;
- `denumerise(f2,f3)` inverse le processus de la fonction numérise : elle considère un fichier contenant un entier par ligne, `f2`, le converti en texte qu'il enregistre dans le fichier `f3`.

7. Écrire une fonction `chiffrer_RSA(f1,f3,d,n)` qui :
- considère le fichier texte `f1`, le numérise en entier de $[\![0, n-1]\!]$ et enregistre le tout dans un fichier `f2`, un entier par ligne ;
- chiffre chaque entier du fichier `f2`, par la méthode RSA, avec la clé de chiffrement (d, n) ;
- enregistre, les entiers obtenus après chiffrement dans le fichier `f3`, un entier par ligne.

8. Écrire une fonction `dechiffrer_RSA(f1,f3,e,n)` qui :
   - considère le fichier `f1`, contenant sur chaque ligne un entier de $[\![0, n-1]\!]$;
   - déchiffre chaque entier, par le méthode RSA, avec la clé de déchiffrement (e, n) ;
   - enregistre, les entiers obtenus après déchiffrement dans le fichier `f2`, un entier par ligne ;
   - retranscrit en texte le fichier `f2` dans un fichier texte `f3`.
9. Traitons un cas simple afin de vérifier les fonctions précédentes : $n = 15770708441$, $d = 5$ le message à déchiffrer est contenu dans `secret1.txt`.

a) Factoriser n à l'aide d'un petit programme PYTHON.

b) Utilisant la fonction `Bezout` donnée, déterminer e, l'inverse de d modulo $(p-1)(q-1)$.

c) Retrouver le message originel.

Partie C - Cryptanalyse par la méthode $p-1$ de Pollard

La méthode $p-1$ de Pollard est une méthode de factorisation qui consiste à identifier les facteurs premiers p tels que $p-1$ soit friable.
En particulier, si p est un facteur premier de n tel que $p-1$ est friable alors il existe un *petit* nombre B tel que $p-1$ divise $B!$ et p divise $a-1 \wedge n$ avec $a \equiv 3^{B!}\ [n]$.
Un algorithme est :

Entrées : $n \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathbb{N}$ (une borne)

$k \leftarrow 1$
$a \leftarrow 3$
$d \leftarrow 1$
Tant que $d = 1$ et $k \leq B$ faire
    $k \leftarrow k + 1$
    $a \leftarrow a^k\ [n]$
    $d \leftarrow (a-1) \wedge n$
FinTantque

Sortie : d

Remarque : Si $d = 1$, alors la démarche n'est pas productive, on peut réessayer en remplaçant l'entier 3 par n'importe quel entier $g \in [\![2, n-1]\!]$ ou augmenter la borne B.
Remarque : Si $a \neq 1$, alors on a trouvé un facteur de n, on peut poursuivre la factorisation de n en travaillant sur le quotient.

10. Donner une fonction `Pollard_p_1(n,B=10000)` qui recherche un facteur premier p de n dans le cas où $p-1$ est friable avec B une borne, par défaut 10000, telle que $B!$ soit un multiple de $p-1$.
    Exemple `Pollard_p_1(15770708441,180)` $\rightarrow$ `135979`
11. Supposons avoir factorisé n ; on suppose donc connaître p, q et d. Que faut-il faire pour retrouver la clé de déchiffrement e ?
12. Appliquer la démarche de la question précédente pour trouver la clé de déchiffrement, e, associée à la clé de chiffrement $(d = 5, n = 2021)$
13. Utiliser la méthode $p-1$ de Pollard pour décrypter le fichier `secret.txt` dont la clé de chiffrement est donnée dans le fichier `Pollard_inc.py`.

Attention ! L'utilisation de la cryptographie à usage privé ou professionnel est encadrée en France par l'Agence Nationale de la Sécurité des Systèmes d'Information : https://www.ssi.gouv.fr