# Corrigé du DM 16

## Partie A – Définitions et exemples

1. Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} T\left(z+\frac{1}{z}\right) &= \underbrace{\left(z+\frac{1}{z}\right)^5 - 5\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 + 5\left(z+\frac{1}{z}\right)}_{\text{formule du binôme}} \\ &= z^5 + 5\frac{z^4}{z} + 10\frac{z^3}{z^2} + 10\frac{z^2}{z^3} + 5\frac{z}{z^4} + \frac{z}{z^5} \\ &\quad -5\left(z^3 + 3\frac{z^2}{z} + 3\frac{z}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right) + 5\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ &= z^5 + \frac{1}{z^5} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{T = P_5}$.

2. Soit $t \in \mathbb{C}$. On cherche s'il existe $z \in \mathbb{C}^*$ un antécédent de $t$ par $f$ :

$$f(z) = t \quad \Leftrightarrow \quad z + \frac{1}{z} = t \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - tz + 1 = 0$$

D'après <u>d'Alembert-Gauss</u>, un trinôme n'est pas constant et donc admet une (au moins) racine dans $\mathbb{C}$. On note que 0 n'est pas une solution du trinôme. Donc $t$ possède un antécédent par $f$ dans $\mathbb{C}^*$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

3. Supposons qu'il existe deux polynômes $P$ et $Q$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, P\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n} \text{ et } Q\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

Or $f$ est surjective, d'après A2), alors donc pour tout $t \in \mathbb{C}$ il existe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$P(t) = P\left(z+\frac{1}{z}\right) = Q\left(z+\frac{1}{z}\right) = Q(t)$$

Ainsi $P = Q$. L'<u>unicité de l'écriture d'un polynôme</u>, $\boxed{P_n \text{ est unique}}$.

**Méthode :** Une autre approche est de considérer les polynôme $P - Q$ et d'établir qu'il admet une infinité de racine, donc qu'il est nul. Ainsi, $P = Q$.

4(a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors $z^0 + \frac{1}{z^0} = 1 + 1 = 2$ et $z^1 + \frac{1}{z^1} = z + \frac{1}{z}$.

Ainsi $\boxed{P_0 = 2 \text{ et } P_1 = X}$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 2$$

Ainsi, $\boxed{P_2 = X^2 - 2}$.

5. ⇛ *La récurrence porte sur l'existence des $P_n$. La relation de récurrence va apparaître pour établir l'existence de $P_{n+2}$.*

- Initialisation : $P_0, P_1$ et $P_2$ existent et $XP_1 - P_0 = X^2 - 2 = P_2$

• Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose que $P_n$ et $P_{n+1}$ existent.
Évaluons $XP_{n+1} - P_n$ en $z + \dfrac{1}{z}$ où $z \in \mathbb{C}^*$ :

$$\begin{aligned}(XP_{n+1} - P_n)\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + z^n + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n} \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}\end{aligned}$$

Posons $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$, ce polynôme vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad P_{n+2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}$$

• Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ existe et } P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.}$

6. On a
$$\begin{aligned} P_3 &= XP_2 - P_1 = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 3X \\ P_4 &= X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 4X + 2 \\ P_5 &= X(X^4 - 4X + 2) - (X^3 - 3X) = X^5 - 5X^3 + 5X = T \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P_3 = X^3 - 3X,\ P_4 = X^4 - 4X + 2 \text{ et } P_5 = T.}$

7. Soit $z \in \mathbb{C}$, $P_5(z) = z(z^4 - 5z^2 + 5) \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$ ou $\begin{cases} z^2 = y \\ y^2 - 5y + 5 \end{cases}$.

Calcul du discriminant : $\Delta = 25 - 20 = 5$. Les racines sont :

$$y_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} > 0 \text{ et } y_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

De plus $z^2 = y_1 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{\pm\sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}}\right\}$ et $z^2 = y_2 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{\pm\sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}}\right\}$.

On a trouvé cinq racines réelle de $P_5$ qui est de degré 5, donc on connaît toutes ses racines. Ainsi,

$$\boxed{P_5 = X\left(X - \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}\right)}$$

8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ : $\begin{cases} \deg(P_n) = n,\ \mathrm{cd}(P_n) = 1 \text{ et} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \end{cases}$

La troisième propriété traduit que $P_n$ est une fonction paire (resp. impaire) si $n$ est un entier pair (resp. impair). Procédons par récurrence sur deux rangs :

• Initialisation : $P_1 = X$ alors $\deg(P_1) = 1$, $\mathrm{cd}(P_1) = 1$ et $P_1$ est impaire.
$P_2 = X^2 - 2$ alors $\deg(P_2) = 2$, $\mathrm{cd}(P_2) = 1$ et $P_2$ est paire.
Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vérifiée.

• Hérédité : soit $n \geq 1$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vérifiées.
On a $\deg(XP_{n+1}) = 1 + \deg(P_{n+1}) = n + 2$, par hypothèse de récurrence, et $\deg(P_n) = n$. Comme $n + 2 > n$ alors $\deg(P_{n+2}) = \max(n+2, n) = n + 2$.

De plus, $\mathrm{cd}(P_{n+2}) = \mathrm{cd}(XP_{n+1}) = \mathrm{cd}(P_{n+1}) = 1$

Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} P_{n+2}(-x) &= -xP_{n+1}(-x) - P_n(-x) \\ &= -x \times (-1)^{n+1} P_{n+1}(x) - (-1)^n P_n(x) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (-1) = n + 2\,(xP_{n+1}(x) - P_n(x)) \\ &= (-1)^{n+2} P_{n+2}(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vérifiée.
• Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(P_n) = n,\ \text{cd}(P_n) = 1}$ et
$\boxed{P_n \text{ est une fonction paire (resp. impaire) si } n \text{ est un entier pair (resp. impair).}}$
On note que $\deg(P_0) = 0$, $\text{cd}(P_0) = 2$ et $P_0$ est paire.

## Partie B – Factorisation

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
a) On a $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ ($z = 0$ n'est pas solution).
Le discriminant est $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta) = (2i\sin(\theta))^2$. Les racines sont :

$$z_1 = \frac{2\cos(\theta) - 2i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = e^{i\theta} \text{ et } z_2 = e^{-i\theta}$$

Ainsi, $\boxed{z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}}$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$, la <u>formule d'Euler</u> et la <u>formule de Moivre</u> donnent :

$$P_n(2\cos(\theta)) = P_n\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \left(e^{i\theta}\right)^n + \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P_n(2\cos\theta) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos(n\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z};\ n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z};\ \theta = \underbrace{\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}}_{\theta_k} \end{aligned}$$

Les racines de $P_n$ trouvées sont de la forme : $2\cos(\theta_k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il reste à déterminer le nombre de racines deux à deux distinctes trouvées.

La fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On note que $\{\theta_k; k \in [\![0, n-1]\!]\}$ forme un ensemble de $n$ valeurs deux à deux distinctes de $[0, \pi]$ donc $\{\cos\theta_k; ; k \in [\![0, n-1]\!]\}$ forme un ensemble de $n$ valeurs deux à deux distinctes de $[-1, 1]$ et donc $\{2\cos\theta_k; ; k \in [\![0, n-1]\!]\}$ donnent $n$ racines réelles de $P_n$ deux à deux distinctes. Or $P_n$ est de degré $n$ donc on connaît toutes les racines de $P_n$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ les racines de } P_n \text{ sont } \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right); k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$

$$\boxed{P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right)}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$,

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^{2n} = -1 = e^{i\pi} \quad (\star)$$

Le <u>théorème sur les racines $2n$-ème</u> donne :

$$(\star) \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n}\right)}; k \in [\![0, 2n-1]\!]\right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } (\star) \quad &\Leftrightarrow \quad P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad z+\frac{1}{z} \text{ est une racine de } P_n\\
&\Leftrightarrow \quad \forall k\in[\![0,2n-1]\!], e^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)} \text{ est une racine de } P_n\\
&\Leftrightarrow \quad \forall k\in[\![0,2n-1]\!], 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right) \text{ est une racine de } P_n
\end{aligned}$$

Comme la fonction cos est paire et $2\pi$-périodique, on trouve exactement $n$ racine de de $P_n$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.
En effet, la valeur associée à $k$ est égale celle associée à $2n-1-k$.
Ainsi, on retrouve le résultat de la question précédente.

4. D'après A7) : $P_5 = X\left(X-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

D'après B2) : $\prod_{k=0}^{4}\left(X-2\cos\left(\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

Classons les racines par ordre croissant :

$$-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} < -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} < 0 < \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

$$2\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) < 2\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) < 0 < 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) < 2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

Par unicité de la factorisation, $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \text{ et } \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$.

## Partie C – Application à la factorisation des polynômes réciproques

1. a) On a : $\quad 0$ est racine de $Q \quad \Leftrightarrow \quad Q(0)a_0 = 0$ $\qquad$ Or $\deg(Q)=2n$ donne que $a_{2n}\neq 0$ donc
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Leftrightarrow \quad a_{2n}=0$ car $a_0=a_{2n}$

$\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } Q}$.

b) Soit $\alpha\in\mathbb{C}$, une racine de $Q$. D'après C1a) $\alpha\neq 0$ et

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= \sum_{k=0}^{2n} a_k\alpha^{-k} = \frac{1}{\alpha^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} a_k\alpha^{2n-k}\\
&\quad \text{Changement d'indice } \boxed{j=2n-k}\\
&= \frac{1}{\alpha^{2n}}\sum_{j=0}^{2n} a_{2n-j}\alpha^{j}\\
&\quad Q \text{ est réciproque}\\
&= \frac{1}{\alpha^{2n}}\sum_{j=0}^{2n} a_j\alpha^{j} = \frac{1}{\alpha^{2n}}Q(\alpha)
\end{aligned}$$

Donc $Q(\alpha)=0 \quad \Leftrightarrow \quad Q\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$

Ainsi, $\boxed{\alpha \text{ est racine de } Q \text{ si et seulement si } \frac{1}{\alpha} \text{ l'est}}$.

c) Soit $x \in \mathbb{C}^*$ et $y = x + \dfrac{1}{x}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{Q(x)}{x^n} &= \frac{1}{x^n}\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^{k-n} \\
&\quad \text{Changement de d'indice}^* \ \boxed{j = 2n-k} \\
&= a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_{2n-j} x^{n-j} \\
&\quad Q \text{ est réciproque} \\
&= a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{n-j} \\
&= a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(x^{k-n} + x^{n-k}\right) \\
&= a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_{n-k}\left(x + \frac{1}{x}\right) \\
&\quad \text{Changement de d'indice} \ \boxed{j = n-k} \\
&= a_n + \sum_{j=1}^{n} a_{n-j} P_j(y) = \widetilde{Q}(y)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{C}^* \text{ et } y = x + \dfrac{1}{x},\ \ \widetilde{Q}(y) = \dfrac{Q(x)}{x^n}.}$

L'intérêt de cette relation est d'avoir réduit le degré de moitié. Ainsi, trouver les racine de $\widetilde{Q}$ permet de retrouver les racines de $Q$ si $Q$ est un polynôme réciproque.
2. *Application :* soit $Q = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1$.

On pose : $\widetilde{Q} = 2 - 9P_1 + P_2 + P_3 = 2 - 9X + (X^2 - 2) + (X^3 - 3X) = X(X^2 + X - 12)$
Le discriminant est $\Delta = 1 + 48 = 7^2$. Les racines sont :

$$y_1 = \frac{-1-7}{2} = -4 \text{ et } y_2 = 3$$

Donc $\widetilde{Q} = X(X-3)(X+4)$.

Recherche des racines de $Q$ :

- $x + \dfrac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{\pm i\}$
- $x + \dfrac{1}{x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0$ Le discriminant est $\Delta = 9 - 4 = 5$.

Les racines sont : $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

- $x + \dfrac{1}{x} = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 1 = 0$ Le discriminant est $\Delta = 16 - 4 = 12$.

Les racines sont : $x_3 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3}$ et $x_4 = -2 + \sqrt{3}$.
On a trouvé six racines de $Q$ et $\deg(Q) = 6$ donc on connaît toutes les racines de $Q$.
Ainsi, la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $Q$ est

$$\boxed{Q = (X^2+1)\left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)(X + 2 - \sqrt{3})(X + 2 + \sqrt{3})}$$

3. Soit $T = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme réciproque de degré impair.

Calculons $T(-1)$ :

$$\begin{aligned}
T(-1) &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^k b_k \\
&\qquad \text{Changement d'indice } \boxed{j = 2n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{2n+1-j} b_{2n+1-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k - \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} b_{2n+1-j} \\
&\qquad T \text{ est réciproque} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k - \sum_{j=0}^{n} (-1)^{2n+1-j} b_j = 0
\end{aligned}$$

Comme $-1$ est une racine de $T$, alors $\boxed{1 + X \text{ divise } T}$.

Posons $S = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ le quotient de la division de $T$ par $1 + X$ :

$$\begin{aligned}
(1+X)S &= \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{k+1} \\
&\qquad \text{Changement d'indice } \boxed{j = k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k + \sum_{j=1}^{2n+1} a_{j-1} X^j
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients : $\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_2n = b_{2n+1} (\neq 0) \\ \forall j \in [\![1, 2n]\!],\ a_j + a_{j-1} = b_j \end{cases}$

On a $b_0 = b_{2n+1} \quad \Rightarrow \quad a_0 = a_{2n}$. Pour $j \in [\![1, 2n]\!]$,

$$a_j + a_{j-1} = b_j = b_{2n+1-j} = a_{2n-j} + a_{2n+1-j}$$

Une récurrence pour $j \in [\![0, n-1]\!]$ donne que $a_j = a_{2n-j}$. Donc $S$ est un polynôme réciproque.

Ainsi, $\boxed{\text{le quotient de } T \text{ par } 1 + X \text{ est un polynôme réciproque de degré pair}}$.