DM 16

à rendre le mardi 4 mars 2025

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'étudier l'existence et les propriétés des polynômes P_n tels que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$

Rappel de calcul et d'identification :

- si $Q = 2X-1$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z+\dfrac{1}{z}) = 2\left(z+\dfrac{1}{z}\right) - 1 = 2z + \dfrac{2}{z} - 1$.
- si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $R(z+\dfrac{1}{z}) = \left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2 - \left(z+\dfrac{1}{z}\right) + 3$ alors $R = X^2 - X + 3$

Partie A – Définitions et exemples

1. Soit $T = X^5 - 5X^3 + 5X$. Pour $z \in \mathbb{C}$, calculer $T(z+\frac{1}{z})$ et en déduire que T convient pour P_5.
2. Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+\frac{1}{z} \end{array}\right.$. Montrer que f est surjective.
3. Montrer que si P_n existe alors P_n est unique.

4(a) Déterminer P_0 et P_1.

(b) Développer $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2$ et en déduire P_2.

5. Montrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ existe et } P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

6. Déterminer P_3, P_4 et retrouver l'expression de P_5 obtenue en A1).
7. Déterminer la factorisation de P_5 en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
8. Déterminer le degré de P_n, son coefficient dominant et éventuellement si P_n est une fonction paire ou impaire.

Partie B – Factorisation

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\theta)$.

b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(2\cos(\theta))$ en fonction de n et θ.

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n et la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 0$, et retrouver ainsi le résultat précédent.
4. Donner les deux factorisations obtenues pour P_5.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{10}$ et $\cos\dfrac{3\pi}{10}$.

Partie C – Application à la factorisation des polynômes réciproques

1. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $2n$ défini par $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ où $a_{2n} \neq 0$.
On suppose que, pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a : $a_k = a_{2n-k}$. Un tel polynôme est dit réciproque.

On définit le polynôme $\hat{Q}$ par :

$$\widetilde{Q} = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} P_k.$$

a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.

b) Montrer que si α est une racine de Q alors $\dfrac{1}{\alpha}$ l'est aussi.

c) Soit $x \in \mathbb{C}^*$, on pose $y = x + \dfrac{1}{x}$. Montrer que $\widetilde{Q}(y) = \dfrac{Q(x)}{x^n}$.
Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

2. *Application :* soit le polynôme Q suivant :

$$Q = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1.$$

Décomposer Q en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Considérons un polynôme réciproque de degré impair : $T \in \mathbb{C}[X]$, défini par

$$T = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k \text{ avec } \begin{cases} b_{2n+1} \neq 0 \\ \forall k \in [\![0, 2n+1]\!] \quad b_k = b_{2n+1-k} \end{cases}$$

Montrer que $X + 1$ divise T et que le quotient associé est un polynôme réciproque de degré pair.