Espaces probabilisés finis

1 Expérience aléatoire. Événement

1.1 Expérience aléatoire

Définition – Expérience aléatoire. Univers des résultats possibles
On appelle expérience aléatoire $\mathcal{E}$ une expérience qui reproduite dans des conditions identiques peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance. L'ensemble des issues (ou des résultats possibles ou des réalisations) est appelé univers des résultats possibles, est noté Ω.

Exemples

1. On lance une pièce de monnaie deux fois de suite. On note 0 pour *Face* et 1 pour *Pile*. L'univers est $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0);(0,1);(1,0);(1,1)\}$.
2. On lance un dé, l'univers est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; pour 3 lancers, l'univers devient $\{1,2,3,4,5,6\}^3$.
3. On lance une infinité de fois une pièce. L'univers est infini : $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
4. On lance une fléchette sur une cible de 30cm de diamètre, l'univers est infini :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 15\}$$

5. On mesure la durée de vie d'une ampoule, l'univers est infini : $\Omega = [0,+\infty[$.

On se limitera dans ce premier cours au cas où Ω est un ensemble fini (discret).

1.2 Événement

Définition – Événement. Événement élémentaire
On appelle événement aléatoire (associé à $\mathcal{E}$) un sous-ensemble de l'univers Ω dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non. Un événement est donc une partie de Ω.
Pour tout $\omega \in \Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est appelé événement élémentaire.

Exemples

1. On lance deux fois de suite une pièce.
L'événement «le premier lancer est *Pile*» est modélisé par $A = \{(1,0);(1,1)\}$.
L'événement «les deux lancers donnent des résultats différents» est modélisé par $B = \{(0,1);(1,0)\}$.
2. On lance un dé.
L'événement «le résultat est un nombre pair» est modélisé par $C = \{2,4,6\}$.
L'événement «le résultat est 4» est modélisé par $D = \{4\}$. C'est un événement élémentaire.

Opérations sur les événements – On donne ci-dessous la correspondance entre la description d'un événement aléatoire et sa modélisation ensembliste. Dans tout le tableau, A et B désignent des événements.

Description événement aléatoire	Modélisation ensembliste
Évènement A	sous-ensemble S
Événement contraire à A	$\overline{A}$
A et B sont réalisés	$A \cap B$
A ou B est réalisé	$A \cup B$
La réalisation de A entraine celle de B	$A \subset B$
A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
Événement certain (se réalise toujours)	Ω
Événement impossible (ne se réalise jamais)	$\emptyset$

Exercice : Illustrer les notations ci-avant dans le cadre du lancer d'un dé.

[1] à compléter

Solution –

Définition – Système complet d'événements

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'événements. On dit que cette famille forme un système complet d'événements lorsque :

(i) ces événements sont 2 à 2 incompatibles : si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.

(ii) leur réunion est l'événement certain : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Remarque – Un système complet d'évènements (***SCdE***) peut être associé à une disjonction de l'ensemble des issues. En particulier cela permet de décomposer un évènement en une réunion d'évènements (en utilisant la distributivité).

$$B = B \cap \Omega = B \bigcap \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

Ceci sera réutiliser !

➤ Une partition de Ω est un SCd'E dont les évènements ne sont pas vide !

Exemples

1. On lance une pièce deux fois de suite, l'univers est $\Omega = \{0,1\}^2$.
La famille (A_0, A_1) est un système complet d'événement où :
$A_0 = \{(0,0); (0,1)\} =$ «le premier lancer donne *Face*»
$A_1 = \{(1,0); (1,1)\} =$ «le premier lancer donne *Pile*»
En particulier, **pour tout évènement A, $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'évènements.**

2. Pour un dé à 6 faces : $\{1,3,6\}, \{2,4\}$ et $\{5\}$ forment un système complet d'évènements.

Exercice : Dans une suite de n lancers d'une pièce, on note F_i (resp. P_i) l'évènement "Face (resp. Pile) sort au ième lancer".

1. Montrer que $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$ est un système complet d'évènements.
2. Que modélise ce système complet d'évènements ?

[2] à compléter

Solution –

Remarque – La notion de première occurrence permet de définir une famille d'évènements deux à deux incompatibles : première apparition d'un Pile, première apparition d'un nombre pair, ...

2 Probabilité

2.1 Définition

Définition – Probabilité

Soit Ω est un univers fini. On appelle probabilité sur Ω toute application $\mathbf{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant :

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,

2. si A et B sont deux événements incompatibles alors $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est appelé espace probabilisé fini, tandis que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé espace probabilisable.

2.2 Propriétés

Proposition – *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.*

(i) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$,

(ii) pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$

(iii) pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$

(iv) si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i),$$

(v) si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

[3] à compléter

Démonstration –

Montrer (ii), (i) puis (iii)

Exercice : Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$:

1. Montrer que $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$. Comment cette formule se réécrit-elle lorsque $A \subset B$?
2. Montrer que $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.
3. Déterminer $\mathbf{P}(A \cup B \cup C)$.

[4] à compléter

Solution –

Théorème – Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ où $n = \text{Card}(\Omega)$. Pour toute famille de réels $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ vérifiant :

(i) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \geq 0$,

(ii) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

il existe une et une seule probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que, $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\omega_i) = p_i$.

Remarque – Autrement dit, lorsque Ω est fini, une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.

[5] à compléter

Démonstration –

Chercher les différentes étapes du raisonnement. Établir l'un ou l'autre des étapes.

Exemple

On lance un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on pose $P(\{i\}) = p_i$.
Déterminons p_i pour que la probabilité de chaque face soit proportionnelle au carré de son numéro.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $i \in \Omega$: $p_i = \lambda i^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} p_i = 1$

Il vient $\displaystyle\lambda \sum_{k=1}^{6} i^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{6}{6.7.13} = \frac{1}{91}$. Ainsi, $\forall i \in \Omega, \qquad p_i = \dfrac{i^2}{91}$

2.3 Probabilité uniforme

Définition – Équiprobabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. On dit que la probabilité est uniforme si tous les événements élémentaires ont même probabilité.

Théorème – Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé **fini** de probabilité uniforme. Alors, pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \qquad \left(\text{vulgarisé par } \mathbf{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}\right)$$

Remarques –

1. En particulier, si $\omega \in \Omega$ alors $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

2. Lorsque la probabilité est uniforme (on dit aussi qu'il y a équiprobabilité), on est ramené à dénombrer des ensembles.

Exercices :

1. On lance 4 dés non pipés. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.

2. Une personne possède un trousseau de n clés pour ouvrir une porte. Elle les essaie au hasard, une à une. Déterminer la probabilité que la k-ième ouvre ?

3. On lance au hasard r balles dans 3 cases. Quelle est la probabilité pour qu'aucune case ne soit vide ?

[6] à compléter

Solution –

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Définition

Définition – **Probabilité de B sachant A**
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $\mathbf{P}(A) > 0$. Si $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle probabilité de B sachant A ou probabilité de B sachant que A est réalisé le réel noté $\mathbf{P}(B|A)$ ou $\mathbf{P}_A(B)$ et défini par :

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$$

Remarque – Ne pas confondre $P(B \backslash A) = P(B - A)$ et $P(B|A)$.

Théorème – Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $\mathbf{P}(A) > 0$.
Alors $\begin{array}{rccc} \mathbf{P}_A : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & B & \longmapsto & \mathbf{P}_A(B) \end{array}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Démonstration –

On vérifie rapidement les trois caractéristiques.

Exemple

On lance un dé à 6 faces. Quelle est la probabilité p pour obtenir un numéro pair sachant que le résultat est supérieur strict à 3 ?
On note A : résultat supérieur strict à 3 et B : résultat pair :

$$p = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\{4,6\})}{P(\{4,5,6\})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

Exercice : Paradoxe des deux enfants - Un ami a deux enfants.
1. Quelle est la probabilité p_1 pour que ce soient 2 garçons ?
2. On souhaite parier sur le fait qu'il ait au moins un garçon. Quelle hypothèse est plus intéressante :

— $H1$: L'ainée est une fille

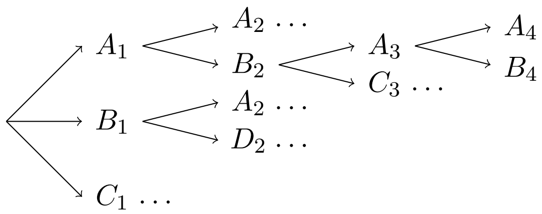
— $H2$: Il a une fille

[7] à compléter

Solution –

3.2 Formule des probabilités composées

Exemple de situations : une expérience se déroulent en une succession d'épreuves dépendantes les une des autres.



On s'intéresse à la probabilité d'une chemin de l'arbre de probabilité associé. Deux cas classiques :

- les tirages sans remise : on ne peut considérer l'état de second tirage qu'après la réalisation du premier car l'urne est modifiée entre temps.
- les lancers successifs d'une pièce jusqu'à obtenir Pile (et l'on arrête) : l'existence des lancers ultérieurs dépend du faite que Pile ne soit pas sorti avant. Dans ce cas, la dépendance porte sur l'existence mais n'affecte pas la valeur des probabilité

Théorème – **Formule des probabilités composées (conditionnement successif)**
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une famille d'événements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbf{P}_{A_1\cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Autrement dit : *dans une arbre de probabilité, pour calculer la probabilité d'un noeud ou d'une feuillle, on calcule le produit des probabilités conditionnelles des branches qui mène à ce noeud*

[8] à compléter

Démonstration –

Procéder par récurrence sur n.

Exercice : Une urne opaque contient 10 boules dont 6 rouges et 4 vertes. On tire successivement quatre boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge, puis deux vertes, puis une rouge ?

[9] à compléter

Solution –

Attention ! Par convention, si $\mathbf{P}(A) = 0$ alors on accepte la notation $\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A) = 0$.

3.3 Formule des probabilités totales

Exemple de situation : une expérience se déroulent en deux épreuves successives, la deuxième dépendant de la première. On s'intéresse à la probabilité d'un évènement lié à la seconde épreuve à l'aide d'un SCd'E lié aux résultats de la première.

Théorème – **Formule des probabilités totales**
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace de probabilisé fini et $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements.
La probabilité totale d'un évènement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ se décompose :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)$$

[10] à compléter

Démonstration –

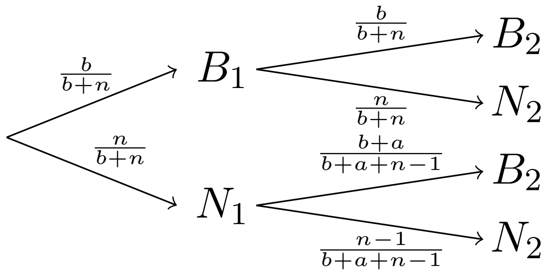
Remarque – Un cas classique : soit A un événement tel que $0 < \mathbf{P}(A) < 1$, alors $(A, \overline{A})$ est un SCd'E : pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ on a :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

Exemple

Urne à la Polya

On dispose d'une urne contenant b boules blanches et n boules noires $(b, n > 0)$. On tire une boule : si elle est blanche, on la remet ; si elle est noire, on la remplace par a boules blanches. Calculer la probabilité pour que la deuxième boule tirée soit blanche.



(N_1, B_1) forme un système complet d'évènements, d'où par la formule des probabilités totales

$$P(B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(N_1)P_{N_1}(B_2) = \left(\frac{b}{n+b}\right)^2 + \frac{n(a+b)}{(n+b)(n+b+a-1)}$$

Exercice : On lance un dé non truqué. Si le dé donne 1, on tire une carte dans un jeu de 32 cartes ; si le dé donne 2 ou 3, on tire une carte dans un jeu de 52 cartes ; enfin si le dé donne 4, 5 ou 6 on choisit au hasard un des quatres rois.
Quelle est la probabilité d'obtenir le roi de trèfle ?

Exercice : Problème de Monty Hall - ***Las Vegas 21***

Un animateur d'un jeu propose à un joueur de choisir une boite parmi trois. L'une contient un chèque les autres sont vides.
Prenant note du choix du joueur, l'animateur ouvre une des deux autres boites : elle est vide !
Pour finir, l'animateur propose au joueur de modifier son choix pour l'autre boite non encore ouverte. Est-il plus avantageux pour le joueur de conserver le choix initial ou de changer pour l'autre boite ?

Cette approche met l'accent sur le comportement du joueur afin de déterminer s'il a intérêt à changer de porte ou non.
On note, G l'évènement "le joueur gagne" et B l'évènement "le joueur choisi initialement la bonne porte".
1. Montrer que

$$\mathbf{P}(G) = \frac{1}{3}\mathbf{P}_B(G) + \frac{2}{3}\mathbf{P}_{\overline{B}}(G)$$

On précisera le théorème utilisé, ses hypothèses et on justifiera les valeurs numériques introduites.
2. Déterminer $\mathbf{P}(G)$ pour la variante (1) : "le joueur conserve son choix".
3. Déterminer $\mathbf{P}(G)$ pour la variante (2) : "le joueur modifie son choix".
4. Conclure.

[11] à compléter

Solution –

3.4 Formule de Bayes

Exemple de situation : une expérience se déroulent en deux épreuves successives, la deuxième dépendant de la première. On s'intéresse à la probabilité d'un évènement lié à la première épreuve sachant la réalisation d'une évènement lié à la seconde.
On cherche à renverser un conditionnement !

Théorème – **Formule de Bayes**
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé et deux évènements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbf{P}(A) > 0$ et $\mathbf{P}(B) > 0$. La probabilité de A sachant B se déduit de celle de B sachant A :

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

Si $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle et tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbf{P}_B(A_k) = \frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{A_i}(B)\mathbf{P}(A_i)}$$

Démonstration –

> La formule de Bayes découle de la définition de la probabilité conditionnelle :
>
> $$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$
>
> La seconde expression consiste à remplacer l'expression de $\mathbf{P}(B)$ par la formule des probabilités totales sur le SCd'E $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$:
>
> $$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{A_i}(B)\mathbf{P}(A_i)$$

■

Remarques –

1. En pratique, on appliquera premièrement la formule des probabilités totales pour calculer $\mathbf{P}(B)$, puis la forme simple de la formule de Bayes.
2. Veillez à identifier et formaliser une situation de renversement par une formule de Bayes et ne pas se contenter d'une probabilité conditionnelle.

Exercice : Une maladie affecte un français sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ?

[12] à compléter

Solution – ■

Exercice : Les voitures d'un magasin proviennent de deux usines : 60 % de A et 40 % de B. Parmi celles qui viennent de A, 30 % présentent un défaut ; 10 % pour celles qui viennent de B.
Quelle est la probabilité pour qu'une voiture ayant un défaut vienne de B ?

[13] à compléter

Solution – ■

4 Événements indépendants

4.1 Indépendance de deux événements

Définition – **Indépendance de deux événements**
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. A et B sont dits indépendants pour la probabilité $\mathbf{P}$ lorsque :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

Remarque – Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles !

Exercice : On considère une famille et les événements suivants : $A =$« la famille a au moins un gars et une fille » et $B =$« la famille a au plus une fille ». Les événements A et B sont-ils indépendants si la famille a deux enfants ? Même question avec trois enfants.

[14] à compléter

Solution –

Proposition –
(i) Si $\mathbf{P}(A) > 0$ et $\mathbf{P}(B) > 0$, alors on a les équivalences suivantes :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A) \;\Leftrightarrow \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B).$$

(ii) Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

[15] à compléter

Démonstration –

4.2 Généralisation à n événements

Définition – Indépendance de n événements
Soient $A_1, \dots, A_n$ n événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. Les événements A_i sont dits mutuellement indépendants ou indépendants dans leur ensemble si pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout ensemble d'entiers distincts $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

ou $\forall I \subset [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}\left(\underset{i\in I}{\cap} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Proposition – *Soient $A_1, \dots, A_n$ n événements mutuellement indépendants d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$.*
Alors la famille $(B_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est mutuellement indépendante.

Remarque – Des événements indépendants dans leur ensemble sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse.

Exercice : On jette deux fois de suite un dé non pipé, on considère les événements suivants :
- le premier lancer donne un chiffre pair,
- le second lancer donne un chiffre pair,
- la somme des deux résultats est un nombre impair.

Montrer que ces événements sont indépendants deux à deux mais pas dans leur ensemble.

[16] à compléter

Solution –

Remarque – En pratique, l'indépendance (mutuelle) découle du modèle de l'expérience et n'est pas déduite par la vérification des relations de la définition.