DM 17

à rendre le mardi 11 mars 2025

Polynômes de degrés échelonnés

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P_0, P_1, \dots, P_n$, $n+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \ldots < \deg(P_n).$$

On dit que les polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont de degrés échelonnés.
1. On souhaite montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre en raisonnant par l'absurde. Supposons la famille liée :
a) Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne soient pas tous nuls et

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

On considère le plus grand entier $q \in [\![0, n]\!]$ tel que $\lambda_q \neq 0$, i.e. $q = \max(k \in [\![0, n]\!], \lambda_k \neq 0)$.
Déterminer le degré de $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$.
b) Établir une contradiction et conclure.
2. On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$.
On veut montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrer, par exemple par analyse-synthèse, que $\mathbb{K}_{k-1}[X]$ et $\mathrm{Vect}(P_k)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{K}_k[X]$.
b) Montrer par récurrence que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
c) Conclure.
3. *Exemple 1 :* Soient $a \in \mathbb{K}$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = (X-a)^k$ (on a donc $P_0 = 1$).
a) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
b) Soient $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-a)^k$. Montrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$P^{(j)} = \sum_{k=j}^{n} \lambda_k \frac{k!}{(k-j)!} (X-a)^{k-j},$$

où les $P^{(j)}$ sont les polynômes dérivés successifs de P.
c) Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, déduire de la question précédente les coordonnées de P dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$. On pourra calculer $P^{(j)}(a)$ pour $j \in [\![0, n]\!]$.
d) Quel est le nom de la formule obtenue ?
4. *Exemple 2 :* Soient a, b, c trois éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. On pose :

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = (X-a), \qquad P_2 = (X-a)(X-b)$$

a) Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
b) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P en fonction de $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.