Polynômes de degrés échelonnés

1. a) Avec les notation de l'énoncé, on a :

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_q P_q$$

Pour tout $k \in [\![1, q-1]\!]$, $\deg(P_k) \leq \deg(P_{q-1})$. Par somme de polynôme,

$$\deg(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{q-1} P_{q-1}) \leq \max\{\deg(P_k); k \in [\![1, q-1]\!]\} \leq \deg(P_{q-1})$$

Or $\deg(P_{q-1}) \neq \deg(P_q)$, donc par somme de deux polynômes (avec $\lambda_q \neq 0$)

$$\deg\big((\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{q-1} P_{q-1}) + \lambda_q P_q\big) = \deg(P_q)$$

Ainsi, $\boxed{\deg(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = \deg(P_q).}$
b) Or $\deg(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n) = \deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$.
Ceci est une contradiction, donc la famille n'est pas liée : elle est libre.
Ainsi, $\boxed{\text{une famille de polynômes échelonnés en degré est libre.}}$
2. a) Procédons par analyse-synthèse.

- Analyse : soit $P \in \mathbb{K}_k[X]$, on suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{K}_{k-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = Q + \lambda P_k$. Notons α le coefficient dominant de P_k et a_k le coefficient de degré k de P. Alors , l'identification du coefficient de degré k de cette égalité donne :

$$a_k = \lambda\alpha \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a_k}{\alpha}$$

Il vient $Q = P - \dfrac{a_k}{\alpha} P_k \in \mathbb{K}_{k-1}[X]$.
λ et Q sont entièrement déterminés connaissant P, ils sont uniques : $\mathbb{K}_{k-1}[X] \oplus \mathrm{Vect(P_k)}$.

- Synthèse : soit $P \in \mathbb{K}_k[X]$, alors les notations ci-avant on a

$$P = \left(P - \frac{a_k}{\alpha} P_k\right) + \frac{a_k}{\alpha} P_k \in \mathbb{K}_{k-1}[X] + \mathrm{Vect(P_k)}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{K}_{k-1}[X] \oplus \mathrm{Vect}(P_k) = \mathbb{K}_k[X], \text{ ce sont deux sous-espaces supplémentaires de } \mathbb{K}_k[X].}$
<u>Autre approche</u> : Soit $P \in \mathbb{K}_k[X]$, alors la division euclidienne de P par P_k donne qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$P = QP_k + R \qquad \text{avec } \deg(R) < k$$

Or $\deg(P) \leq k$ implique que $Q \in \mathbb{K}$ et $R \in \mathbb{K}_{k-1}[X]$. Ainsi, $\mathbb{K}_{k-1}[X] \oplus \mathrm{Vect}(P_k) = \mathbb{K}_k[X]$.

b)
- <u>Initialisation :</u> $\deg(P_0) = 0$ donc P_0 est constant et non nul, alors $\mathbb{K}_0[X] = \mathrm{Vect}(P_0)$.
- <u>Hérédité :</u> Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, supposons $\mathbb{K}_k[X] = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k)$.
D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{k+1}[X] &= \mathbb{K}_k[X] + \mathrm{Vect}(P_{k+1}) = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k) + \mathrm{Vect}(P_{k+1}) \\ &= \mathrm{Vect(P_0, P_1, \ldots, P_{k+1})}\end{aligned}$$

- <u>Conclusion :</u> $\boxed{\mathrm{Vect(P_0, P_1, \ldots, P_n)} = \mathbb{K}_n[X].}$

c) La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ et est libre.
Ainsi, $\boxed{(P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}_n[X].}$
3. *Exemple 1 :*
a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$.
Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{(P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}_n[X].}$

b) Procédons par récurrence :

- <u>Initialisation :</u> Pour $j=0$, $P^{(0)}=P$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\frac{k!}{(k-0)!}(X-a)^{k-0}=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(X-a)^k=P$.

La relation est vérifiée au rang 0

- <u>Hérédité :</u> Soit $j\in[\![0,n-1]\!]$. Supposons la relation vérifiée au rang j.

$$\begin{aligned}P^{(j+1)}=\left(P^{(j)}\right)'&=\left(\sum_{k=j}^{n}\lambda_k\frac{k!}{(k-j)!}(X-a)^{k-j}\right)'\\&=\underbrace{0}_{k=j}+\sum_{k=j+1}^{n}\lambda_k\frac{k!}{(k-j)!}(k-j)(X-a)^{k-j-1}=\sum_{k=j}^{n}\lambda_k\frac{k!}{(k-j-1)!}(X-a)^{k-j-1}\end{aligned}$$

- <u>Conclusion :</u> $\boxed{\text{pour tout } j\in[\![0,n]\!],\ P^{(j)}=\displaystyle\sum_{k=j}^{n}\lambda_k\frac{k!}{(k-j)!}(X-a)^{k-j}.}$

c) Pour $j\in[\![0,n]\!]$, $P^{(j)}(a)=\lambda_j\frac{j!}{0!}=j!\lambda_j$ aussi $\lambda_j=\dfrac{P^{(j)}(a)}{j!}$.

Il vient, $\boxed{P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(X-a)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.}$

Les coordonnées de P dans la base donnée sont $\left(\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$

d) C'est la formule de Taylor.

4. *Exemple 2 :*

a) $\deg(P_0)=0$, $\deg(P_1)=1$ et $\deg(P_2)=2$. D'après ce qui précède, $\boxed{(P_0,P_1,P_2)\text{ est une base de }\mathbb{K}_2[X].}$

b) On cherche α,β et γ tel que $P=\alpha P_0+\beta P_1+\gamma P_2\quad(\bigstar)$.

L'évaluation en a, b et c de la relation donne :

$$(\bigstar)\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{llll}\alpha & & &=P(a)\\ \alpha & +\beta(b-a) & &=P(b)\\ \alpha & +\beta(c-a) & +\gamma(c-a)(c-b) &=P(c)\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\alpha=P(a)\\ \beta=\dfrac{P(b)-P(a)}{b-a}\\ \gamma=\dfrac{(c-b)P(a)+(a-c)P(b)+(b-c)P(c)}{(b-a)(c-a)(c-b)}\end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les coordonnées de } P \text{ sont } (\alpha,\beta,\gamma)}$ comme définis ci-dessus.