Proposition de corrigé du devoir surveillé 8

Exercice 1 - Questions indépendantes

1. $\mathcal{E}_1 \quad 105x - 81y = 6$

Calcul du PGCD du couple $(105, 81)$:

$$\begin{aligned} 105 \wedge 81 &= 24 \wedge 81 = 24 \wedge 9 \\ &= 6 \wedge 9 = 6 \wedge 3 = 3 \end{aligned}$$

Comme $3|6$ alors $\mathcal{E}_1 \quad \Leftrightarrow \quad 35x - 27y = 2$

Relation de Bezout du couple $(35, 27)$ est

$$-10 \times 35 + 13 \times 27 = 1$$

Ainsi, une solution particulière de $\mathcal{E}_1$ est

$$(-20, -26)$$

i	q_i	r_i	u_i	v_i
-1	X	35	1	0
0	X	27	0	1
1	1	8	1	-1
2	3	3	-3	4
3	2	2	7	-9
4	1	1	-10	13
5	2	0	X	X

De plus, par le théorème de Gauss, il vient

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{E}_4 \quad &\Leftrightarrow \quad (x + 20) \times 35 + (y + 26) \times 27 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x + 20 = 27k \text{ et } y + 26 = -35k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = -20 + 27k \text{ et } y = -26 - 35k \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{E}_1 = \{(-20 + 27k, -26 - 35k); k \in \mathbb{Z}\}.}$

2. $\mathcal{E}_2 \quad 57x \equiv 6\ [156]$ Calcul du PGCD du couple $(156, 57)$:

$$156 \wedge 57 = (156 - 2 \times 57) \wedge 57 = 42 \wedge 57 = 42 \wedge 15 = 12 \wedge 15 = 12 \wedge 3 = 3$$

Et donc $\mathcal{E}_2 \quad \Leftrightarrow \quad 19x \equiv 2\ [52]$

Relation de Bezout du couple $(52, 19)$ est

$$-4 \times 52 + 11 \times 19 = 1$$

11 est un inverse de 19 modulo 52 et donc

$$\mathcal{E}_2 \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 11 \times 2 \equiv 22\ [52]$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{E}_2 = 22 + 52\mathbb{Z}.}$

i	q_i	r_i	u_i	v_i
-1	X	52	1	0
0	X	19	0	1
1	2	14	1	-2
2	1	5	-1	3
3	2	4	3	-8
4	1	1	-4	11
5	4	0	X	X

3. $\mathcal{E}_3 \quad \begin{cases} x \equiv 7\ [61] \\ x \equiv 2\ [44] \end{cases}$

Relation de Bezout du couple $(61, 44)$ est

$$13 \times 61 - 18 \times 44 = 1$$

Une solution de $\begin{cases} x \equiv 1\ [61] \\ x \equiv 0\ [44] \end{cases}$ est $x_1 = -18 \times 44 = -792$

Une solution de $\begin{cases} x \equiv 0\ [61] \\ x \equiv 1\ [44] \end{cases}$ est $x_2 = 13 \times 61 = 793$.

Une solution de $\mathcal{E}_3$ est

$$x_0 = 7x_1 + 2x_2 = -3958$$

i	q_i	r_i	u_i	v_i
-1	X	61	1	0
0	X	44	0	1
1	1	17	1	-1
2	2	10	-2	3
3	1	7	3	-4
4	1	3	-5	7
5	2	1	13	-18
6	3	0	X	X

De plus, par le théorème de Gauss, il vient

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{E}_3 \quad &\Leftrightarrow \quad x - x_0 \equiv 0\ [61] \text{ et } x - x_0 \equiv 0\ [44] \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = x_0 + k \times \underbrace{61 \times 44}_{=2684} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{E}_3 = -3958 + 2684\mathbb{Z}.}$

Exercice 2 - Arithmétique

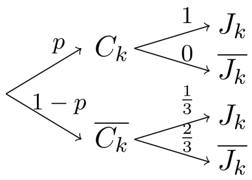
1. **N non divisible par 2 ou 3**
   Pour $N = 6\prod_{k=1}^{n} p_k - 1$, comme $6 = 2 \times 3$ alors $N \equiv -1 \equiv 1$ [2] et $N \equiv -1 \equiv 2$ [3].
   Ainsi, $\boxed{\text{2 et 3 ne sont pas des facteurs premiers de } N.}$
2. **Les facteurs premiers de N sont congrus à 1 ou à 5 modulo 6**
   D'après la question précédente, les facteurs de N ne peuvent ni être pair, ni être multiple de 3, autrement dit leur reste modulo 6 ne peut être dans $\{0, 2, 3, 4\}$.
   Donc les facteurs de N sont congrus soit à 1 soit à 5 modulo 6.
   Ainsi, en particulier, $\boxed{\text{les facteurs premiers de } N \text{ sont congrus soit à 1 soit 5 modulo 6.}}$
3. **N a au moins un facteur premier congru à 5 modulo 6**
   Raisonnons par l'absurde et supposons que N ne possède pas de facteurs premiers congru à 5 modulo 6. Alors d'après ce le résultat précédent, ils sont tous congrus à 1 modulo 6. Donc leur produit est aussi congru à 1 modulo 6 et donc N aussi. Or $N \equiv -1$ [6] donc il y a une contradiction.
   Ainsi, $\boxed{N \text{ a au moins un facteur premier congru à 5 modulo 6.}}$
4. **Il existe une infinité de nombres premiers p congrus à 5 modulo 6**
   La définition de N fait partie d'un raisonnement par l'absurde avec pour hypothèse qu'il existe un nombre fini, $n \in \mathbb{N}^*$, de facteurs premiers congrus à 5 modulo 6, identifié par les $(p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.
   D'après 3, il existe $j \in [\![1, n]\!]$, tel que p_j divise N c'est-à-dire :

   $$N \equiv 0 \ [p_j] \text{ et donc } 0 \equiv 6\prod_{k=1}^{n} p_k - 1 \equiv -1 \ [p_j]$$

   Cette contradiction permet de conclure : $\boxed{\text{il existe une infinité de nombres premiers } p \text{ tels que } p \equiv 5\ [6].}$

Exercice 3 - Jeu télévisé

1. a) Arbre complété :



b) La famille $\{C_k, \overline{C_k}\}$, pour k fixé dans $[\![1,5]\!]$, est un système complet d'évènements de probabilité non nulle : $\mathbf{P}(C_k) = p \in]0,1[$ et $\mathbf{P}(\overline{C_k}) = 1-p \in]0,1[$.
La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(J_k) &= \mathbf{P}(C_k)\mathbf{P}_{C_k}(J_k) + \mathbf{P}(\overline{C_k})\mathbf{P}_{\overline{C_k}}(J_k) \\ &= p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1,5]\!],\ \mathbf{P}(J_k) = r = \frac{1+2p}{3}}$.

c) Donnons une description des six situations conduisant à la réalisation de G :

$$\boxed{\begin{aligned}G \;=\; &(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) \cup (\overline{J_1} \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) \cup (J_1 \cap \overline{J_2} \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) \\ &\cup (J_1 \cap J_2 \cap \overline{J_3} \cap J_4 \cap J_5) \cup (J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap \overline{J_4} \cap J_5) \cup (J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap \overline{J_5})\end{aligned}}$$

d) L'incompatibilité des six évènements (2 à 2) permet d'écrire $\mathbf{P}(G)$ comme une somme :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(G) \;=\; &\mathbf{P}(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) + \mathbf{P}(\overline{J_1} \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) + \mathbf{P}(J_1 \cap \overline{J_2} \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) \\ &+ \mathbf{P}(J_1 \cap J_2 \cap \overline{J_3} \cap J_4 \cap J_5) + \mathbf{P}(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap \overline{J_4} \cap J_5) + \mathbf{P}(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap \overline{J_5})\end{aligned}$$

L'indépendance mutuelle des réponses pour des questions distinctes permet de réécrire chaque terme comme le produit de cinq facteurs, par exemple :

$$\mathbf{P}(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) = \mathbf{P}(J_1)\mathbf{P}(J_2)\mathbf{P}(J_3)\mathbf{P}(J_4)\mathbf{P}(J_5) = r^5$$

$$\mathbf{P}(\overline{J_1} \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) = \mathbf{P}(\overline{J_1})\mathbf{P}(J_2)\mathbf{P}(J_3)\mathbf{P}(J_4)\mathbf{P}(J_5) = (1-r)r^4$$

Ainsi, on obtient $\mathbf{P}(G) = r^5 + 5(1-r)r^4 = r^4(r+5-5r) = r^4(5-4r)$.
On trouve bien $\boxed{\mathbf{P}(G) = r^4(5-4r)}$.

⇛ *On peut reprendre cette question en modélisant une variable aléatoire de loi binomiale :*

- *On répète cinq fois de façon indépendante une épreuve.*
- *Cette épreuve consiste à répondre à une question, le candidat répond juste avec la probabilité r.*
- *Soit X le nombre de bonnes réponses obtenues.*
- *Alors X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(5, r)$.*

Ainsi $\mathbf{P}(G) = \binom{5}{5}r^5 + \binom{5}{4}r^4(1-r) = \cdots = r^4(5-4r)$.

e) On veut déterminer $\mathbf{P}_G(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5)$.
On a $p \in]0,1[$ donc $r = \dfrac{1+2p}{3} \in]0,1[$ et $\mathbf{P}(G) = r^4(5-4r) \in]0,1[$. La définition de la probabilité conditionnelle donne

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_G(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) &= \frac{\mathbf{P}\left((J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) \cap G\right)}{\mathbf{P}(G)} = \frac{\mathbf{P}(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5)}{\mathbf{P}(G)} \\ &= \frac{r^5}{r^4(5-4r)} = \frac{r}{5-4r} = \frac{\frac{1+2p}{3}}{5-4\frac{1+2p}{3}} = \frac{1+2p}{11-8p}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}_G(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap J_5) = \dfrac{r}{5-4r} = \dfrac{1+2p}{11-8p}}$.

2. a) Calcul de $s = \mathbf{P}_{E_2}(G)$.

Dans l'enveloppe E_2, le candidat connaît deux réponses ; ainsi, $\mathbf{P}_{E_2}(G)$ est la probabilité qu'il réponde correctement à au moins deux questions parmi les trois restantes, dont il ne connait pas les réponses.

On reprend les notations J_k, pour $k \in [\![1,3]\!]$ et G. On note que $\mathbf{P}(J_k) = \dfrac{1}{3}$ car le joueur ne connait pas la réponse, il répond donc au hasard. Il vient :

$$\mathbf{P}_{E_2}(G) = \mathbf{P}\left((J_1 \cap J_2 \cap J_3) \cup (\overline{J_1} \cap J_2 \cap J_3) \cup (J_1 \cap \overline{J_2} \cap J_3) \cup (J_1 \cap J_2 \cap \overline{J_3})\right)$$

L'incompatibilité des évènements et l'indépendance des réponses pour des questions distinctes donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{E_2}(G) &= \mathbf{P}(J_1)\mathbf{P}(J_2)\mathbf{P}(J_3) + \mathbf{P}(\overline{J_1})\mathbf{P}(J_2)\mathbf{P}(J_3) + \mathbf{P}(J_1)\mathbf{P}(\overline{J_2})\mathbf{P}(J_3) + \mathbf{P}(J_1)\mathbf{P}(J_2)\mathbf{P}(\overline{J_3}) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{27}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{s = \mathbf{P}_{E_2}(G) = \dfrac{7}{27}}$.

b) Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on a $\mathbf{P}(E_i) = \dfrac{1}{3}$. La famille $\{E_1, E_2, E_3\}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulle. La formule des probabilités totales donne

$$\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}_{E_1}(G) + \mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}_{E_2}(G) + \mathbf{P}(E_3)\mathbf{P}_{E_3}(G)$$

Or le candidat connaît deux réponses dans les enveloppes E_2 et E_3, donc $s = \mathbf{P}_{E_2}(G) = \mathbf{P}_{E_3}(G) = \dfrac{7}{27}$ et il connaît quatre réponse dans E_1, donc $\mathbf{P}_{E_1}(G) = 1$.

Ainsi $\boxed{g = \mathbf{P}(G) = \dfrac{1}{3} \times 1 + 2 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{7}{27} = \dfrac{41}{81} = \dfrac{1}{3}(1+2s)}$.

⇛ *Ici aussi, il est possible d'introduire une variable aléatoire de loi Binomiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{3})$.*

c) On veut déterminer $\mathbf{P}_{\overline{G}}(E_2)$.

$\mathbf{P}(\overline{G}) = 1 - \dfrac{41}{81} = \dfrac{40}{81} > 0$ et $\mathbf{P}(E_2) = \dfrac{1}{3} > 0$. La formule de Bayes donne

$$\mathbf{P}_{\overline{G}}(E_2) = \frac{\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}_{E_2}(\overline{G})}{\mathbf{P}(\overline{G})} = \frac{\frac{1}{3}(1-s)}{1-g} = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{7}{27}\right)}{\frac{40}{81}} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $\boxed{\mathbf{P}_{\overline{G}}(E_2) = \dfrac{1}{2}}$.

Remarque : Ce résultat était facile à anticiper !

Exercice 4 - Équation différentielle homogène

1. On sait que $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $E \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; ainsi, il suffit de montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$:
   - Considérons l'application nulle : $f = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
   $$f''(x) = 0 \text{ et } (1+x^2)f(x) = (1+x^2) \times 0 = 0$$
   Donc $f \in E$ et donc E est non vide.
   - Soit $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il vient que $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire. Soit $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)''(x) &= (\alpha f' + \beta g')'(x) = (\alpha f'' + \beta g'')(x) = \alpha f''(x) + \beta g''(x) \\ &\qquad \text{par propriété de la dérivation et d'après } (\star) \\ &= \alpha(1+x^2)f(c) + \beta(1+x^2)g(x) \\ &= (1+x^2)(\alpha f(x) + \beta g(x)) = (1+x^2)(\alpha f + \beta g)(x)\end{aligned}$$
   Ainsi $\alpha f + \beta g \in E$. E est stable par combinaison linéaire. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Ainsi, $\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$.
2. Soit $u, v \in E$. Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ alors $u'v - uv'$ est au moins de classe $\mathcal{C}^1$. La <u>caractérisation des fonctions constantes</u> donne que $u'v - uv'$ est constante si et seulement si $(u'v - uv')'$ est nulle. Soit $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned}(u'v - v'u)' &= u''v + u'v' - v''u - v'u' = u''v - v''u \\ (u'v - v'u)'(x) &= u''(x)v(x) - v''(x)u(x) \\ &\qquad \text{d'après } (\star) \\ &= (1+x^2)u(x)v(x) - (1+x^2)v(x)u(x) = 0\end{aligned}$$
   Ainsi, $(u'v - v'u)'$ est nulle sur $\mathbb{R}$ donc $u'v - v'u$ est constante.
   Ainsi, $\boxed{\text{si } u, v \in E, \text{ alors } u'v - v'u \text{ est une fonction constante.}}$
3. a) Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \mapsto e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (dans $\mathbb{R}$) donc par composition, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned}f'(x) &= xe^{\frac{x^2}{2}} \\ f''(x) &= e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)f(x)\end{aligned}$$
   Ainsi, $\boxed{f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \text{ est élément de } E.}$

   b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas donc $\dfrac{1}{f}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^2$.
   De plus $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2}$ est la primitive de $\dfrac{1}{f^2}$ nulle en 0, elle est donc de classe $\mathcal{C}^3$.

Enfin, g est de classe $\mathcal{C}^2$ car produit d'applications qui le sont. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \left(f'(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2} + f(x) \times \frac{1}{\big(f(x)\big)^2}\right)' \\
&= \left(f'(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2} + \frac{1}{f(x)}\right)' \\
&= f''(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2} + \frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^2} - \frac{f'(x)}{f(x)^2} \\
&= f''(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2} \\
&\quad \text{d'après } (\star) \\
&= (1+x^2)f(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2} = (1+x^2)g(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{g : x \mapsto f(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2} \text{ est élément de } E.}$

4. a) ⇛ *Cette question revient à montrer que la famille (f, g) est génératrice de E.*
Soit $h \in E$. Comme f ne s'annule pas, considérons $\frac{h}{f}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. En particulier,

$$\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{h'f - hf'}{f^2}$$

D'après 2), il existe une constante $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{\beta}{f^2}$. Cette application étant continue, on peut l'intégrer entre 0 et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\frac{h}{f}\right)'(t)\mathrm{d}t &= \beta\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2} \\
\frac{h(x)}{f(x)} - \frac{h(0)}{f(0)} &= \beta\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2} \\
h(x) &= \underbrace{\frac{h(0)}{f(0)}}_{\alpha} \times f(x) + \beta f(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2}
\end{aligned}$$

Il vient : $h = \alpha f + \beta g$. Ainsi, $\boxed{h \text{ est une combinaison linéaire de } f \text{ et } g}$.
La vraie conclusion est que $E \subset \mathrm{Vect}(f, g)$. Or, d'après 3) $\mathrm{Vect}(f, g) \subset E$ donc $\boxed{E = \mathrm{Vect}(f, g)}$.

b) D'après 4a) (f, g) est une famille génératrice de E. Il reste à établir qu'elle est libre.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g = 0$.
Évaluant cette relation en 0, sachant que $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$, on obtient que $\alpha = 0$. Par suite, comme g est non identiquement nulle (quitte à considérer $g(1)$ et la positivité de l'intégrale) alors $\beta = 0$. Donc $\{f, g\}$ est libre.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (f, g) \text{ est une base de } E.}$

Exercice 5 - Polynômes

1. $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X(2X) - 1 = 4X^2 - 1$ et $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(4X^2-1) - 2X = 8X^3 - 4X$.
   Ainsi, $\boxed{T_1 = 4X^2 - 1 \text{ et } T_2 = 8X^3 - 4X}$
2. a) et b) Traitons les deux questions par une seule récurrence : il convient de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "le terme dominant de T_n est $td(T_n) = 2^n X^n$ et $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$".
   - Initialisation : Comme $T_0 = 1$ et $T_1 = 2X$ les propriétés sont vraies.
   - Hérédité : Soit $n \geq 2$, on suppose les propriétés vraies aux rangs $n-1$ et $n-2$. Etablissons les propriétés au rang n :
     Par hypothèse de récurrence, T_{n-1} est un polynôme de degré $n-1$ donc $2\,X\,T_{n-1}$ est un polynôme de degré n. Comme $deg(T_{n-2}) = n-2 < n$, ainsi le terme dominant de T_n est celui de $2XT_{n-1}$, à savoir par hypothèse de récurrence :
     $$td(T_n) = 2X \times td(T_{n-1}) = 2X2^{n-1}X^{n-1} = 2^n X^n$$
     De plus, $T_n(-X) = 2(-X)T_{n-1}(-X) - T_{n-2}(-X) = -2X(-1)^{n-1}T_{n-1}(X) - (-1)^{n-2}T_{n-2}(X)$.
     Comme $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, on obtient :
     $$T_n(-X) = (-1)^n\big(2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)\big) = (-1)^n T_n(X)$$
     Les propriétés ont été établies au rang n.
   - Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ td(T_n) = 2^n X^n}$ et $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$; en particulier, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n.

   c) Si n est pair, alors $(-1)^n = 1$ et $T_n(-X) = T_n(X)$: T_n est une fonction paire.
   Si n est impair, alors $(-1)^n = -1$ et $T_n(-X) = -T_n(X)$: T_n est une fonction impaire.
   Ainsi, T_n est une fonction paire si n est un entier pair et impaire si n est impair.
3. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = T_n(1)$.
   La relation de récurrence donne : $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et pour $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$.
   La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est
   $$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r-1)^2 = 0$$
   Ainsi, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha n + \beta$.
   Or α et β vérifie : $\begin{cases} a_0 = 1 = \beta \\ a_1 = 2 = \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$.
   Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = T_n(1) = n+1}$.
4. a) Soit $\theta \in]0, \pi[$ (on note que $\sin\theta \neq 0$). Travaillons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
   - Initialisation : $T_0(\cos\theta) = 1$ et $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
     $$T_1(\cos\theta) = 2\cos\theta \quad \text{et} \quad \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$$
     La propriété est vraie pour $n = 1$.
   - Hérédité : Soit $n \geq 2$ supposons la propriété vraie aux rangs $n-1$ et $n-2$.
     $$T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta) = 2\ \cos\theta\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin\theta}$$
     Or $2\cos\theta\sin(n\theta) = \sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta)$, donc $T_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}}$.

b) Ainsi $T_n(\cos\theta) = 0 \quad \Leftarrow \quad \sin((n+1)\theta) = 0 \quad \Leftarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, (n+1)\theta = k\pi$.
Sur $]0,\pi[$, il y a n valeurs possibles : $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.
Or cos réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$.
Ainsi, $\boxed{\text{les } \cos\dfrac{k\pi}{n+1} \text{ sont } n \text{ racines deux à deux distinctes de } T_n.}$

c) Comme T_n est de degré n, on connait toutes ses racines. Le <u>théorème de factorisation</u> donne

$$\boxed{T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)}$$

d) On note que $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Ainsi,

$$T_n(1) = n+1 = 2^n \prod_{k=1}^{n} 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = 4^n \prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$$

Or pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2(n+1)} \in \left[0, \dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right]$ et $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right) \geq 0$.
Ainsi, $\boxed{\prod_{k=1}^{n} \sin\dfrac{k\pi}{2(n+1)} = \sqrt{\dfrac{n+1}{4^n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^n}}$.

5. a) D'après 4.a), pour tout $\theta \in]0,\pi[$: $\sin(\theta)T_n(\cos\theta) - \sin((n+1)\theta) = 0$.
Dérivons deux fois cette égalité de fonction :

$$\cos(\theta)T_n(\cos\theta) - \sin^2(\theta)T_n'(\cos\theta) - (n+1)\cos((n+1)\theta) = 0$$

$$-\sin(\theta)T_n(\cos\theta) - \cos\theta\sin\theta T_n'(\cos\theta) - 2\sin\theta\cos\theta T_n'(\cos\theta) + \sin^3(\theta)T_n''(\cos\theta) + (n+1)^2\sin((n+1)\theta) = 0$$

En divisant la dernière égalité par $\sin(\theta)$ et en utilisant la relation du 4.a), on obtient :

$$\sin^2(\theta)T_n''(\cos\theta) - 3\cos(\theta)T_n'(\cos\theta) + ((n+1)^2 - 1)T_n(\cos\theta) = 0$$

ce qui est bien la relation recherchée.
Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall\theta \in]0,\pi[\quad \sin^2(\theta)T_n''(\cos\theta) - 3\cos(\theta)T_n'(\cos\theta) + ((n+1)^2 - 1)T_n(\cos\theta) = 0}$.

b) Par changement de notation, nous avons d'après 5.a) pour $x \in]-1,1[$ (avec $x = \cos\theta$) :

$$Q(x) = (1-x^2)T_n''(x) - 3xT_n'(x) + (n^2+2n)T_n(x) = 0$$

Or, par opérations (dérivation, produit et somme) sur des polynômes, Q est un polynôme qui est nul sur $]-1,1[$, ainsi il a une infinité de racines et donc il est nul et $-Q$ aussi :

$$\boxed{(X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n = 0}$$

Exercice 6 - Polynômes

1. a) L'évaluation de $P_4 = 4X^4 - X^3 - X^2 - X - 1$ en 2 avec la méthode de Hörner donne :

i	y
4	4
3	4× 2 - 1 = 7
2	7× 2 - 1 = 13
1	13× 2 - 1 = 25
0	25× 2 - 1 = 49

Ainsi, $\boxed{P_4(2) = 49.}$

b) Une fonction `evalP` est :

```
def evalP(n,x):
    e=n
    for i in range(n-1,-1,-1):
        e=e*x-1
    return e
```

Rappel : La méthode classique d'évaluation donne :

```
def evalP(n,x):
    e,m=-1,1
    for i in range(1,n):
        m=m*x
        e=e-m
    m=m*x
    e=e+n*m
    return e
```

c) La fonction `evalP` effectue n additions et n multiplications.

2. a) On a $(X-1)(X^{n-1} + \cdots + X + 1) = X^n - 1$.
Or les racines de $X^n - 1$ sont les n racines n-ième de l'unité :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = (X-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

En simplifiant par le polynôme non nul $X-1$, il vient : $\boxed{X^{n-1} + \cdots + X + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).}$

b) D'après ce qui précède $P_n = nX^n - \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \beta \text{ est racine de } P_n, \text{ on a } \prod_{k=1}^{n-1} \left(\beta - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = n\beta^n.}$

3. On remarque que $P_n(1) = n - \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{n \text{ fois}} = 0$; ainsi, $\boxed{1 \text{ est racine de } P_n.}$

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}$ alors
$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x-1)\big(nx^n - (x^{n-1} + \cdots + x + 1)\big) \\ &= nx^{n+1} - nx^n - (x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1) \\ &= nx^{n+1} - nx^n - (x^n - 1) \end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1.}$

f_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$: $f_n'(x) = n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1}$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = n(n+1)x^{n-1}(x-1).}$

Remarquons que les racines de f_n sont celles de P_n augmentées de 1. Ainsi, d'après 3), on peut déduire que f_n et P_n ont les mêmes racines.

b) Cas n impair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f_n admet 1 pour unique racine réelle, en effet pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f_n(x) > 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } n \text{ est impair, } P_n \text{ admet une unique racine réelle : 1.}}$

c) Cas n pair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f_n admet 1 pour unique racine dans $\mathbb{R}_+$, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $f_n(x) > 0$.

Par ailleurs f_n est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

D'après le théorème de la bijection f_n réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $]-\infty, 1]$ car $f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

Or $0 \in]-\infty, 1]$ donc il existe un unique $\alpha_n \in]-\infty, 0]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

De plus $f_n(0) > 0$, donc on a $\alpha_n < 0$.

Ainsi, f_n admet exactement deux racines réelles : 1 et $\alpha_n \in \mathbb{R}_-^*$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } n \text{ est pair, } P_n \text{ admet exactement deux racines réelles : 1 et } \alpha_n \in \mathbb{R}_-^*.}$

d) Une méthode consiste à faire un balayage de $\mathbb{R}_-$ à partir de 0. Dès que l'on détecte un changement de signe de f_n, on trouve α_n.

$\Rrightarrow$ Une autre méthode consiste à utiliser la dichotomie.

Comme $f_n(-1) = n(-1)^{n+1} - (n+1)(-1)^n + 1 = -n - (n+1) + 1 = -2n < 0$ (car n est pair) et $f_n(0) = 1 > 0$ alors on sait (d'après la bijection exhiber en 4b) que $-1 < \alpha_n < 0$.

Il s'agit de construire deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence :
$$u_0 = -1 \quad v_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq a_n < v_n$$
Supposant u_n et v_n construits. On pose $c = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

- si $f_n(c) > 0$ alors $v_{n+1} = c$ et $u_{n+1} = u_n$

- sinon $v_{n+1} = v_n$ et $u_{n+1} = c$

Ainsi les suites sont constructibles.
Par ailleurs, au rang n, $\dfrac{u_n + v_n}{2}$ est un approximation de a_n à la précision $\dfrac{v_n - u_n}{2}$.

e) Script Python :

Méthode de balayage

```
def alpha_balayage(n,p):
    a=0
    while (a-1)*evalP(n,a)>0:
        a=a-p
    return a
```

Méthode de dichotomie

```
def alpha_dichotomie(n,p):
    u=-1;v=0
    while (v-u)>2*p:
        c=(u+v)/2
        if (c-1)*evalP(n,c)>0:
            v=c
        else:
            u=c
    return (u+v)/2
```

Application au calcul de α_4 :

```
-->alpha_balayage(4,0.001)
-0.6060000000000004
-->alpha_dichotomie(4,0.001)
-0.6064453125
```

Exercice 7 - Schéma de Markov

Partie A : Préliminaire

La suite (u_n) vérifie une <u>relation de récurrence linéaire d'ordre deux</u> :

- l'équation caractéristique associée est : $16r^2 - 20r + 5 = 0$
- le discriminant est : $\Delta = 20^2 - 4 \times 16 \times 5 = 80 = (4\sqrt{5})^2$
- les racines sont $a = \dfrac{20 - 4\sqrt{5}}{32} = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}$ et $b = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{8}$
- il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \lambda a^{n-1} + \mu b^{n-1}$
- recherche de λ et μ grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u_1 = 1 = \lambda + \mu \\ u_2 = \dfrac{3}{4} = \lambda a + \mu b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ a + \mu(b - a) = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ \mu \dfrac{\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{5 - \sqrt{5}}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{10} = \dfrac{4}{5} a \\ \mu = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{10} = \dfrac{4}{5} b \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{4}{5}(a^n + b^n) \quad \text{avec} \quad a = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{8} \text{ et } b = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{8}}$

Partie B : Etude médicale

1. a) On introduit quelques notations :

   M_n l'évènement : le patient est malade lors de la n-ième consultation

   R_n l'évènement : le patient est en rémission lors de la n-ième consultation

   G_n l'évènement : le patient est guéri lors de la n-ième consultation

   On veut déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{P}_{R_n}(R_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{M_n}(R_{n+1})$.

   • L'énoncé donne $\mathbf{P}_{R_n}(M_{n+1}) = \mathbf{P}_{R_n}(G_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

   Or <u>$\mathbf{P}_{R_n}$ est une probabilité</u> et $(G_{n+1}, M_{n+1}, R_{n+1})$ est un système complet d'évènements car :

   - $\Omega = R_{n+1} \cup G_{n+1} \cup M_{n+1}$: lors de la $n+1$-ième consultation, le patient est dans un des trois état,
   - les évènements $G_{n+1}, M_{n+1}, R_{n+1}$ sont deux à deux incompatibles car le patient ne peut être dans deux états différents au même moment.

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi} \quad \mathbf{P}_{R_n}(G_{n+1} \cup M_{n+1} \cup R_{n+1}) &= 1 = \mathbf{P}_{R_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}_{R_n}(M_{n+1}) + \mathbf{P}_{R_n}(R_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \mathbf{P}_{R_n}(R_{n+1}) \\ \mathbf{P}_{R_n}(R_{n+1}) &= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Le patient reste en rémission avec une probabilité } \dfrac{1}{2}.}$

   • De même $\mathbf{P}_{M_n}(R_{n+1}) = 1 - \mathbf{P}_{M_n}(G_{n+1}) - \mathbf{P}_{M_n}(M_{n+1}) = 1 - 0 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

   $\boxed{\text{La probabilité de passer de l'état } M \text{ à l'état } R \text{ est } \dfrac{1}{4}}.$

b) Placer M, G et R aux sommets d'un triangle imaginaire, puis faire les flèches des probabilités de transition. Par exemple : une flèche qui part de G vers lui-même indexée par 1.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille (G_n, M_n, R_n) est un système complet d'évènements.
La formule des probabilités totales donne :

$$\mathbf{P}(G_{n+1}) = \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}(M_n)\mathbf{P}_{M_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}(R_n)\mathbf{P}_{R_n}(G_{n+1})$$

$$g_{n+1} = \mathbf{P}(G_{n+1}) = g_n \times 1 + m_n \times 0 + r_n \times \frac{1}{4}$$

Procédant de même pour $\mathbf{P}(M_{n+1})$ et $\mathbf{P}(R_{n+1})$, on trouve :

$$m_{n+1} = g_n \times 0 + m_n \times \frac{3}{4} + r_n \times \frac{1}{4} \text{ et } r_{n+1} = g_n \times 0 + m_n \times \frac{1}{4} + r_n \times \frac{1}{2}$$

Ce qui donne : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} g_{n+1} = g_n + \frac{1}{4}r_n \\ m_{n+1} = \frac{3}{4}m_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4}m_n + \frac{1}{2}r_n \end{cases}}$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} m_{n+2} &= \frac{3}{4}m_{n+1} + \frac{1}{4}r_{n+1} = \frac{3}{4}m_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}m_n + \frac{1}{2}r_n\right) \\ &= \frac{3}{4}m_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}m_n + \frac{1}{2}(4m_{n+1} - 3m_n)\right) = \frac{5}{4}m_{n+1} - \frac{5}{16}m_n \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 16m_{n+2} = 20m_{n+1} - 5m_n}$.

b) Lors de la première consultation le patient est malade : $r_1 = g_1 = 0$ et $m_1 = 1$.
De plus $m_2 = \frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{4}r_1 = \frac{3}{4}$.
Ainsi la suite (m_n) est celle étudiée dans la partie A : même relation de récurrence, mes termes initiaux !

$$\boxed{\forall n\mathbb{N}^*,\ m_n = \frac{4}{5}(a^n + b^n)}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} r_n &= 4m_{n+1} - 3m_n = \frac{16}{5}(a^{n+1} + b^{n+1}) - \frac{12}{5}(a^n + b^n) \\ &= \left(\frac{16}{5}a - \frac{12}{5}\right)a^n + \left(\frac{16}{5}b - \frac{12}{5}\right)b^n \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = -\frac{2}{5}\left((1+\sqrt{5})a^n + (1-\sqrt{5})b^n\right)}$.

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme (G_n, M_n, R_n) est un système complet d'évènements, alors $g_n + m_n + r_n = 1$.
Ainsi $g_n = 1 - m_n - r_n$, d'après 3b) et 3c), on trouve :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_n = 1 - \frac{2}{5}\left((1-\sqrt{5})a^n + (1+\sqrt{5})b^n\right)}$$

b) On a $0 < a = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8} < 1$ et $0 < b = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} < \dfrac{5+\sqrt{9}}{8} = 1$.
Ainsi $a^n \to 0$ et $b^n \to 0$, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} g_n = 1}$.

c) Posons J l'évènement : le patient de guéri jamais.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $G_n \subset \overline{J}$ donc $\mathbf{P}(G_n) \leq \mathbf{P}(\overline{J}) \leq 1$.
Par encadrement on obtient $\mathbf{P}(\overline{J}) = 1$ et donc $\boxed{\mathbf{P}(J) = 0}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille (G_n, M_n, R_n) est un système complet d'évènements.
La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}(A_n) & = & \mathbf{P}(G_n)\mathbf{P}_{G_n}(A_n) + \mathbf{P}(M_n)\mathbf{P}_{M_n}(A_n) + \mathbf{P}(R_n)\mathbf{P}_{R_n}(A_n) \\ & = & g_n \times 1 + m_n \times \dfrac{3}{4} + r_n \times \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(A_n) = g_n + \frac{3}{4}m_n + \frac{1}{2}r_n}$.

6. On sait que si la patient guérit, il le reste. Ainsi il suffit de considérer son état lors de la consultation précédente. On sait déjà que le patient est initialement malade, donc $\mathbf{P}(B_1) = 0$.
Soit $n \geq 2$. La famille $(G_{n-1}, M_{n-1}, R_{n-1})$ est un système complet d'évènements.
La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}(B_n) & = & \mathbf{P}(G_{n-1})\mathbf{P}_{G_{n-1}}(B_n) + \mathbf{P}(M_{n-1})\mathbf{P}_{M_{n-1}}(B_n) + \mathbf{P}(R_{n-1})\mathbf{P}_{R_{n-1}}(B_n) \\ & = & g_{n-1} \times 0 + m_{n-1} \times 0 + r_{n-1}\dfrac{1}{4} \end{array}$$

$\mathbf{P}_{G_{n-1}}(B_n) = 0$ car le patient était déjà guéri lors de la $(n-1)$-ième consultation.
Ainsi $\boxed{\mathbf{P}(B_1) = 0 \text{ et } \forall n \geq 2 \quad \mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{4}r_{n-1}}$.

Partie C : Formalisme matriciel

1. On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{n+1} = g_n + \dfrac{1}{4}r_n \\ m_{n+1} = \dfrac{3}{4}m_n + \dfrac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{4}m_n + \dfrac{1}{2}r_n \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X_n \quad \text{et} \quad \boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

2. Le coefficient $t_{1,3}$ correspond au coefficient de g_{n+1} porté par r_n dans la relation obtenue en B2a) par la formule des probabilités totales :

$$t_{1,3} = \mathbf{P}_{R_n}(G_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

Ainsi $\boxed{t_{1,3} \text{ est la probabilité de passer de l'état } R \text{ à l'état } G}$.

3. Soit $j = 1$:

$$\begin{array}{rcl} t_{1,1} + t_{2,1} + t_{3,1} & = & \mathbf{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}_{G_n}(M_{n+1}) + \mathbf{P}_{G_n}(R_{n+1}) \\ & = & \mathbf{P}_{G_n}(G_{n+1} \cup M_{n+1} \cup R_{n+1}) \text{ car } \mathbf{P}_{G_n} \text{ est une probabilité} \\ & & \qquad \text{et } (G_n, M_n, R_n) \text{ est un système complet d'évènements} \\ & = & \mathbf{P}_{G_n}(\Omega) = 1 \end{array}$$

Pour $j = 2$ on considère $\mathbf{P}_{M_n}$. Pour $j = 3$, on considère $\mathbf{P}_{R_n}$.
Ainsi $\boxed{\forall j \in \{1,2,3\},\ t_{1,j} + t_{2,j} + t_{3,j} = 1}$. Dans cette configuration, on remarque que la somme des coefficients d'une colonne d'une matrice de transition vaut 1.

4. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   - Initialisation : pour $n = 1$, $T^0 = I_3$ donc $X_1 = I_3 X_1$ est vérifiée.
   - Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons $X_n = T^{n-1} X_1$.
   $$X_{n+1} = TX_n = T \times T^{n-1} X_1 = T^n X_1$$
   - Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} g_n \\ m_n \\ r_n \end{pmatrix} = T^{n-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ m_1 \\ r_1 \end{pmatrix}}$
5. Script de la fonction `etat(n)` utilisant une matrice et le produit matriciel :

```
def etat(n):
    X=np.matrix([[0],[1],[0]])
    T=np.matrix([[1,0,1/4],[0,3/4,1/4],[0,1/4,1/2]])
    return T**n*X

def etat2(n):
    X=np.array([[0],[1],[0]])
    T=np.array([[1,0,1/4],[0,3/4,1/4],[0,1/4,1/2]])
    for i in range(n):
        X=np.dot(T,X)
    return X

def etat3(n):
    g,m,r=0,1,0
    for i in range(1,n+1):
        g,m,r=g+r/4,3*m/4+r/4,m/4+r/2
    return g,m,r
```

Application :

```
>>>etat(12)
[[ 0.64889139]
 [ 0.21699816]
 [ 0.13411045]]
```