DS 8

Mercredi 12 mars 2025 – durée : 4 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Questions indépendantes

1. Résoudre $\mathcal{E}_1$ $\quad 105x - 81y = 6$ dans $\mathbb{Z}^2$
2. Résoudre $\mathcal{E}_2$ $\quad 57x \equiv 6\ [156]$ dans $\mathbb{Z}$
3. Résoudre $\mathcal{E}_3$ $\quad \begin{cases} x \equiv 7\ [61] \\ x \equiv 2\ [44] \end{cases}$

Exercice 2 - Arithmétique

Objectif : Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 5\ [6]$.

On sait que $p = 5$ est un tel nombre premier, et on suppose qu'il existe n nombres premiers distincts $p_1, \dots, p_n$ tels que $p_k \equiv 5\ [6]$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On pose alors :

$$N = \left[6 \prod_{k=1}^{n} p_k\right] - 1$$

1. Identifier $\ell \in [\![0, 2]\!]$ tel que $N \equiv \ell\ [3]$.
   L'entier 3 est il un facteur premier de N ? Et 2, est il un facteur premier de N ?
2. Démontrer que les facteurs premiers de N sont congrus à 1 ou à 5 modulo 6.
3. Démontrer que N a au moins un facteur premier congru à 5 modulo 6.
4. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 5\ [6]$.

Exercice 3 - Jeu télévisé

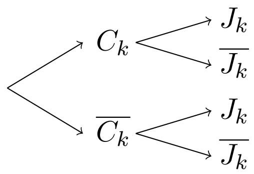
Les questions 1 et 2 sont indépendantes

Un candidat participe à un jeu télévisé où on lui pose cinq questions. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, une seule étant correcte. Le candidat gagne s'il fournit au moins quatre réponses exactes. Lorsqu'il ne connait pas la réponse à une question, il répond au hasard.
On considère les événements :

- C_k : «il connait la réponse à la k^{ieme} question»
- J_k : «il donne la bonne réponse à la k^{ieme} question»
- G : «il gagne» .

On supposera que des événements liés à des questions distinctes sont mutuellement indépendants.

1. On suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que, pour tout $k \in [\![1,5]\!]$, $\mathbf{P}(C_k) = p$.
   a) Reproduire l'arbre suivant et compléter les probabilités sur chaque branche.



   b) Soit r la valeur commune des $\mathbf{P}(J_k)$. Exprimer r en fonction de p.
   c) Décrire G comme la réunion de six évènements.
   d) Montrer que $\mathbf{P}(G) = r^4(5-4r)$.
   e) Sachant que la candidat a gagné, exprimer en fonction de r, puis de p, la probabilité qu'il ait fourni la bonne réponse à chaque question.
2. Au début du jeu, on présente au candidat trois enveloppes contenant chacune cinq questions. Il en choisi une au hasard. Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on note E_i l'évènement : "le joueur choisit l'enveloppe E_i". De plus, on suppose que le candidat connait quatre réponses dans l'enveloppe E_1 et deux dans les enveloppes E_2 et E_3.
   a) Calculer la probabilité que le candidat gagne sachant qu'il a choisi l'enveloppe E_2, notée s.
   b) Calculer la probabilité que le candidat gagne, notée g.
   c) Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'enveloppe E_2 sachant qu'il a perdu.

Exercice 4 - Équation différentielle homogène

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ des fonctions numériques définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On note E l'ensemble des fonctions φ de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation $(\star)$ suivante :

$$(\star) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi''(x) = (1+x^2)\varphi(x).$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si u et v sont deux éléments de E, alors $u'v - uv'$ est une fonction constante.
3. Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.
   a) Vérifier que f est élément de E.
   b) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\big(f(t)\big)^2}$

   Montrer que g est élément de E.

4. a) Soit h une solution de $(\star)$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question [1] appliqué aux fonctions h et f, que h est combinaison linéaire de f et de g.
   b) Montrer finalement que (f, g) est une base de E.

Exercice 5 - Polynômes

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$$

1. Calculer T_2 et T_3.
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n et donner son coefficient dominant.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$
   c) En déduire que si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.
4. a) Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$: $T_n(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1; 1[$, que l'on explicitera.
   c) Établir, pour tout entier naturel non nul n : $T_n = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\left(\frac{k\theta}{n+1}\right)\right)$.
   d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\theta}{2(n+1)}\right)$ en fonction de n.
5. a) Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$:

$$\sin(\theta)^2 T_n''(\cos(\theta)) - 3\cos(\theta) T_n'(\cos(\theta)) + (n^2 + 2n) T_n(\cos(\theta)) = 0$$

Indication : On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) $\theta \mapsto \sin(\theta) T_n(\cos(\theta)) - \sin((n+1)\theta)$.

   b) En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(X^2 - 1) T_n'' + 3XT_n' - (n^2 + 2n) T_n = 0$$

Exercice 6 - Polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme suivant : $P_n = nX^n - (X^{n-1} + \cdots + X + 1)$.

1. Question d'algorithmie :
   a) Appliquer la méthode de Hörner pour évaluer le polynôme P_4 en 2, c'est-à-dire calculer $P_4(2)$. Vous donnerez le tableau de suivi du contenu des variables utilisées lors du déroulement de l'algorithme :

i	y
4	?
$\vdots$	$\vdots$

Attention ! La méthode d'Hörner est à connaitre ! Si vous avez un oubli, vous traiterez la question avec la méthode d'évaluation de votre choix.

1. $u'v - uv'$ doit vous rappeler le numérateur d'une formule connue ;-)

b) Écrire le script d'une fonction `evalP(n,x)` renvoie $P_n(x)$ en utilisant l'algorithme de Hörner où `n` $\in \mathbb{N}^*$ et `x` $\in \mathbb{R}$.

c) Combien d'opérations $+$ et $\times$ la fonction effectue-t-elle lors de l'appel `evalP(n,x)` ?

2. On note β une racine réelle ou complexe de P_n.

a) Factoriser $X^{n-1} + \cdots + X + 1$.

b) Déduire de la factorisation précédente une expression simplifiée de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(\beta - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

3. P_n admet une racine réelle évidente, laquelle ?

4. On souhaite déterminer si P_n admet d'autres racines réelles. On définit la fonction f_n par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = (x-1)P_n(x).$$

a) Montrer que $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ et calculer la dérivée de f_n.

b) On suppose n impair.
Dresser le tableau de variation de f_n et montrer que f_n admet 1 comme unique racine.
En déduire le nombre de racines réelles de P_n.

c) On suppose n pair.
Dresser le tableau de variation de f_n et montrer que f_n admet exactement deux racines réelles : 1 et un réel $\alpha_n < 0$.
En déduire le nombre de racines réelles de P_n.

d) Toujours dans le cas où n est pair, décrire <u>assez brièvement</u> une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de α_n.

e) Donner le script d'une fonction `alpha(n,p)` qui détermine α_n à la précision `p` près.

Exercice 7 - Schéma de Markov

Partie A : Préliminaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{3}{4}, \quad \text{pour tout } n \geq 1 \quad 16u_{n+2} - 20u_{n+1} + 5u_n = 0$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{4}{5}(a^n + b^n) \quad \text{avec} \quad a = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \text{ et } b = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

Partie B : Etude médicale

Un médecin suit un patient dont l'état évolue entre les trois stades suivants : malade (M), en rémission (R) et guéri (G). Lors de la première consultation, le patient est malade.

- Si le patient est guéri, il reste définitivement guéri.
- S'il est en rémission, il sera guéri lors de la consultation suivante avec une probabilité $\frac{1}{4}$; il sera malade avec la même probabilité.
- S'il est malade, il le sera toujours lors de la consultation suivante avec une probabilité $\frac{3}{4}$. Sinon, il sera en rémission.

1. a) Déterminer la probabilité que le patient reste dans l'état R d'une consultation à la suivante puis la probabilité qu'il passe de l'état M à l'état R.

   (Vous pourrez introduire des évènements du type M_n, R_n ...)

   b) Réaliser un diagramme de type triangulaire afin de modéliser le problème. Indiquer uniquement les flèches pertinentes.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n (resp. r_n, m_n) la probabilité que le patient soit dans l'état G (resp. R, M) lors de la n-ième consultation.

   Établir les relations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} g_{n+1} &= g_n + \dfrac{1}{4} r_n \\ m_{n+1} &= \dfrac{3}{4} m_n + \dfrac{1}{4} r_n \\ r_{n+1} &= \dfrac{1}{4} m_n + \dfrac{1}{2} r_n \end{cases}$$

3. a) Déterminer une relation entre m_{n+2}, m_{n+1} et m_n.

   b) En déduire l'expression de m_n en fonction de n.

   c) Donner l'expression de r_n en fonction de n.

4. a) Exprimer g_n en fonction de n. On pourra au préalable déterminer la somme $g_n + r_n + m_n$.

   b) Déterminer la limite de la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

   c) Quelle est la probabilité que le patient ne guérisse jamais ?

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : le patient est dans le même état lors des n-ième et $(n+1)$-ième consultations. Déterminer $\mathbf{P}(A_n)$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement : le patient atteint l'état G pour la première fois à la n-ième consultation. Déterminer $\mathbf{P}(B_n)$.

Partie C : Formalisme matriciel

On note $X_n = \begin{pmatrix} g_n \\ m_n \\ r_n \end{pmatrix}$ et $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $T = (t_{i,j})_{i,j \in [\![1,3]\!]}$.

1. D'après la question B2, déterminer la matrice T telle que $X_{n+1} = TX_n$.

   La matrice T est appelée **matrice de transition**.

2. Donner une interprétation en probabilité du nombre $t_{1,3}$.

3. Avec un argument issu des probabilités, montrer que pour tout $j \in [\![1,3]\!]$:

$$t_{1,j} + t_{2,j} + t_{3,j} = 1$$

   Dans cette configuration, on remarque que la somme des coefficients d'une colonne d'une matrice de transition vaut 1.

4. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{pmatrix} g_n \\ m_n \\ r_n \end{pmatrix} = T^{n-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ m_1 \\ r_1 \end{pmatrix},$$

5. Donner le script PYTHON d'une fonction `etat(n)` qui retourne les valeurs de g_n, m_n et r_n.

FIN DE L'ÉNONCÉ