TP 17 - Intégration numérique

Objectif : Calculer $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Situation : f une application continue sur $[a,b]$.

➜ Description de la méthode :

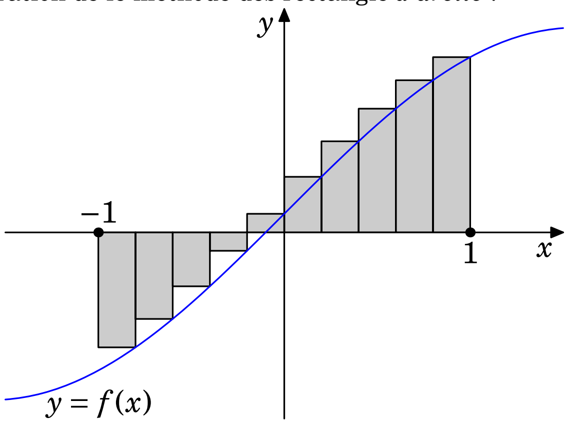
- introduire une subdivision uniforme du segment $[a,b]$
- remplacer, sur chacun d'eux, l'application f par une expression qui simplifie le calcul de l'intégrale.

$$I = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \;\approx\; I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} \tilde{f}(t)dt$$

Méthode des rectangles

Prog

Illustration de le méthode des rectangle *à droite* :



Il s'agit de remplacer la fonction, sur chaque intervalle $[c,d]$ par une fonction constante (polynôme de degré 0) : par exemple $f(c)$ (*méthode des rectangle à gauche*) ou $f(d)$ (*méthode des rectangle à droite*).

L'approximation donne :

$$\int_c^d f(t)\mathrm{d}t \approx (d-c)f(c)$$

avec $c = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et $d = a+(k+1)\dfrac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Cela revient au calcul d'une somme de Riemann :

$$I_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Exercice 1 *Méthode des rectangles*

1. Écrire le script d'une fonction `rectangles(f,a,b,n)` qui retourne l'approximation I_n de l'intégrale de f sur $[a,b]$.
2. Appliquer la méthode précédente pour donner une approximation de π sachant que :

$$\frac{\pi}{6} = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

Méthode des trapèze

Il s'agit de remplacer la fonction, sur chaque intervalle $[c,d]$ par l'équation de la corde (polynôme de degré 1).

L'approximation donne :

$$\int_c^d f(t)\mathrm{d}t \approx (d-c)\frac{f(c)+f(d)}{2}$$

avec $c = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et $d = a+(k+1)\dfrac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Remarque : On peut aussi interpréter cette méthode comme la moyenne de la méthode des rectangles à gauche et de celle à droite :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Exercice 2 *Méthode des trapèze* Considérant la suite des valeurs mesurées dans une liste `L` et sachant que les mesures ont été faites toutes les 2ms, déterminer une fonction utilisant la méthode des trapèzes et permettant de calculer la valeur moyenne suivante :

$$I_{moy} = \frac{1}{t_{final}}\int_0^{t_{final}} I(t)\mathrm{d}t$$

Utiliser cette fonction pour calculer l'écart type :

$$I_{ec} = \sqrt{\frac{1}{t_{final}}\int_0^{t_{final}} \left(I(t) - I_{moy}\right)^2 \mathrm{d}t}$$

Exercice 3 Écrire le script d'une fonction `trapezes(f,a,b,n)`.

Compléments

Exercice 4 *La méthode de Simpson*

La méthode de Simpson (hors programme) consiste à remplacer la fonction, sur chaque intervalle $[c,d]$ par un polynôme de degré 2 : la parabole passant par $(c, f(c))$ et $(d, f(d))$ et le point milieu de l'arc.

$$\int_c^d f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{d-c}{6}\left(f(c) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f(d)\right)$$

avec $c = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et $d = a+(k+1)\dfrac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Écrire le script d'une fonction `simpson(f,a,b,n)` qui retourne l'approximation de l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la méthode de Simpson.

Exercice 5 *Vitesse de convergence* Nous désirons maintenant évaluer la vitesse de convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Supposons que la précision vérifie (en particulier lorsque que n n'est pas trop grand) :

$$\exists \alpha \in \mathbb{N}; \quad \forall n, \quad |I - I_n| \approx \frac{C}{n^\alpha}$$

Le nombre α est un entier naturel dans le cas des méthodes usuelles ; il donne une mesure de la vitesse de convergence.

1. Donner un moyen calculatoire *simple* pour évaluer α.
Donner $\alpha_{rect} = \ldots, \quad \alpha_{trap} = \ldots, \quad \alpha_{Simp} = \ldots$
2. Proposer un outil graphique pour comparer les vitesses de convergences des différentes méthodes.

Lycée Saint-Exupery – maffre.saintexupery@gmail.com – MPSI

Exercice 6 *Courbe d'une fonction*
Considérant la fonction suivante de $\mathbb{R} \mapsto]-1,1[$:

$$\text{th} : t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

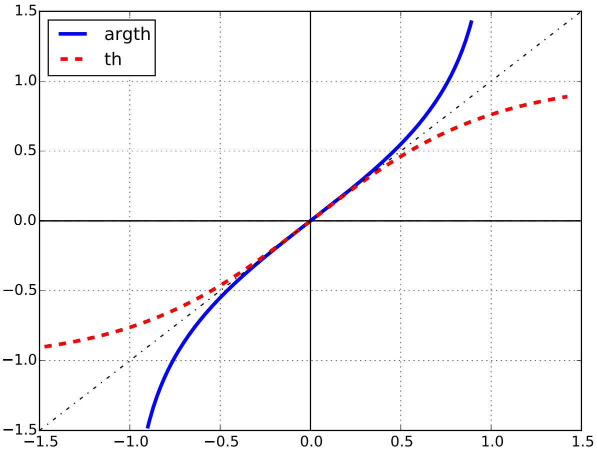
La dérivée de sa fonction réciproque est

$$\text{argth}' : t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$$

1. Écrire une fonction `artanh(x,h)` qui calcule

$$\text{argth}(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} \mathrm{d}t$$

par une méthode numérique de pas h.
2. Tracer sur un même graphique les courbes de th et argth.



Lycée Saint-Exupery – maffre.saintexupery@gmail.com – MPSI