Corrigé du DM 19

1. a) f et Id commutent, donc :

$$\boxed{(f-\mathrm{Id})^2 + f\circ(2\mathrm{Id}-f) = f^2 - 2f + \mathrm{Id} + 2f - f^2 = \mathrm{Id}}$$

b) D'après la question précédente, $\mathrm{Id} = (f-\mathrm{Id})^2 + f\circ(2\mathrm{Id}-f)$ donc

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^n,\ x = \mathrm{Id}(x) = (f-\mathrm{Id})^2(x) + (f\circ(2\mathrm{Id}-f))(x)}$$

c) Montrons que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f)$: Soit $x\in\mathbb{R}^n$ alors d'après 1b) :

$$x = (f-\mathrm{Id})^2(x) + (f\circ(2\mathrm{Id}-f))(x)$$

- comme $f\circ(f-\mathrm{Id})^2 = 0$ donc $f\big((f-\mathrm{Id})^2(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^n}$ c'est-à-dire $(f-\mathrm{Id})^2(x)\in\mathrm{Ker}\,(f)$
- $(f\circ(2\mathrm{Id}-f))(x) = f\big(2x - f(x)\big)\in\mathrm{Im}\,(f)$

Ainsi, $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f)$.
De plus, le théorème du rang, pour $\mathbb{R}^n$ de dimension n (finie) et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, donne

$$\dim\mathbb{R}^n = \dim\mathrm{Ker}\,(f) + \dim\mathrm{Im}\,(f)$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f)\oplus\mathrm{Im}\,(f)}$.
Remarque : A la place du théorème de rang, on peut aussi montrer que la somme est direct en établissant : $\mathrm{Ker}\,(f)\cap\mathrm{Im}\,(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

2. a) On pose $P(X) = aX+b$, puis on remplace et on identifie :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + X(aX+b) = 1 \quad &\Leftrightarrow\quad \left(\frac{1}{4}+a\right)X^2 + \left(-\frac{5}{4}+b\right)X + 1 = 1\\ &\Leftrightarrow\quad a = -\frac{1}{4} \text{ et } b = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P = -\frac{1}{4}X + \frac{5}{4}}$;

b) D'après 2a), $\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}) + f\circ P(f) = \mathrm{Id}$ et donc pour tout $x\in\mathbb{R}^n$:

$$x = \left(\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})\right)(x) + (f\circ P(f))(x)$$

- Considérant le polynôme annulateur de f, on a :

$$f\left(\left(\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})\right)(x)\right) = 0_{\mathbb{R}^n} \text{ donc } \left(\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})\right)(x)\in\mathrm{Ker}\,(f)$$

- $(f\circ P(f))(x) = f\left(P(f)(x)\right)\in\mathrm{Im}\,(f)$

Ainsi, $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f)$.
- Comme au 1c), le théorème du rang donne $\dim\mathbb{R}^n = \dim\mathrm{Ker}\,(f) + \dim\mathrm{Im}\,(f)$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f)\oplus\mathrm{Im}\,(f)}$.

3. a) $P\in\mathbb{R}_p[X]$, il existe donc $(a_0,\dots,a_p)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$.
De plus $P(0) = a_0$ et $P'(0) = a_1$. Donc d'après l'énoncé, $\boxed{a_0 = 0 \text{ et } a_1\neq 0}$.

b) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, alors $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ \exists t \in \mathbb{R}^n;\ x = f(t) \end{array} \right.$ et dons $f^2(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Plus généralement, pour tout $k \geq 2$, $f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Comme P est annulateur de f, on a $(P(f))(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$, et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} a_k f^k(t) &= a_1 f(t) + \left(\sum_{k=2}^{p} a_k f^{k-2} \right) \left(f^2(t) \right) \\ &= a_1 f(t) + \left(\sum_{k=2}^{p} a_k f^{k-2} \right) (0_{\mathbb{R}^n}) \\ &= a_1 f(t) \end{aligned}$$

Comme $a_1 \neq 0$ alors

$$a_1 f(t) = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \Rightarrow \quad f(t) = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \Rightarrow \quad x = f(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
L'inclusion $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \subset \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$ est toujours vraie car l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}$
Le théorème du rang donne donne $\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$
Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)}$.
c) Les deux polynômes introduits aux questions 1) et 2) vérifie la contrainte du polynôme de la question 3) : $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ et de degré supérieur à 2.

$$P_1 = X - 2X^2 + X^3 \qquad P_2 = 4X - 5X^2 + X^3$$