DM 19

à rendre le mardi 8 avril 2025

Polynôme annulateur

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \mathrm{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

   a) Déterminer $(f - \mathrm{Id})^2 + f \circ (2\,\mathrm{Id} - f)$.

   b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = (f - \mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\,\mathrm{Id} - f))(x)$.

   c) Utiliser ce dernier résultat pour montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f \circ (f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\,\mathrm{Id}) = 0$.

   a) Déterminer un polynôme P du premier degré, vérifiant $\frac{1}{4}\,(X-1)(X-4) + X\,P(X) = 1$.

   b) En déduire que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p avec $p \geq 2$, et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

   a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, a_2, ..., a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P(X) = a_1 X + ... + a_p X^p$.

   b) En déduire que $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

   c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes ?