Séries – Exercices

Généralités

Exercice 19.1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.
2. Prouver la convergence de la série de terme général u_n^2 et calculer sa somme.
3. À l'aide des sommes partielles, montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
4. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 19.2 *Séries téléscopiques*
Étudier la convergence et donner les sommes éventuelles des séries suivantes :

$$\sum \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right), \quad n \geq 1, \quad \sum \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}, \; n \geq 1$$

Comparaison de séries

Exercice 19.3 Montrer que $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n^3}} \sim \dfrac{1}{n}$ et $\big(\ln(n)\big)^{-\ln(n)} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Conclure sur la nature des séries $\sum \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n^3}}$ et $\sum \big(\ln(n)\big)^{-\ln(n)}$.

Exercice 19.4 Nature de la série de terme général :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right), \qquad b_n = \frac{n\ln(n)}{5^n} \qquad c_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+3}\right),$$

$$d_n = \frac{\cos(2n)}{3n^2-4n+1}, \qquad e_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right), \qquad f_n = \left(\frac{1}{\ln(2n)}\right)^n,$$

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}, \qquad h_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{(-1)^n}{n}, \qquad j_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e.$$

Exercice 19.5
1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

2. On admet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 19.6 Discuter en fonction des réels positifs a et b la nature de la série de terme général $\dfrac{a^n}{1+b^n}$.

Exercice 19.7 *Développement asymptotique*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$.
1. Montre que le suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
2. Étudier la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.

Exercice 19.8 Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}$$

En déduire la nature de la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

Exercice 19.9 Déterminer les réels a, b et c strictement positifs tels que $\sum u_n$ converge, où :

$$u_n = a^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}\right)$$

Exercice 19.10 *Critère de d'Alembert*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs.
1. Démontrer que :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ converge}$$

2. Quelle est la nature de $\sum u_n$ si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
3. Application : Nature des séries $\sum \dfrac{n^{12}}{n!}$, $\sum \dfrac{n^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Séries particulières

Exercice 19.11 *Série dérivée d'une série géométrique*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum nx^{n-1}$, pour $n \geq 1$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$, pour $n \geq 2$ converge si et seulement si $|x| < 1$.
Le cas échéant, vérifier que

$$\sum_{k=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

2. En déduire la nature et la somme éventuelle des séries :

$$\sum \frac{n-1}{3^{n+1}}, \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } \sum \frac{4n^2+5n}{5^n}, \text{ pour } n \geq 1$$

Exercice 19.12 **Méthode**

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^k \mathrm{d}t$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, réécrire $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ sous la forme d'une intégrale.
3. Conjecturer la limite de S_n et l'établir.
4. Conclure que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et donner sa somme.

Exercice 19.13 Donner la nature et la somme éventuelle des séries suivantes :

$$\sum \frac{(-1)^n}{3(n+1)!}, \text{ pour } n \geq 0 \qquad \sum \frac{n^2+1}{2^{n-1}n!}, \text{ pour } n \geq 2$$

Exercice 19.14
1. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Trouver une suite (u_n) positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u_k$$

3. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\right)$ converge.

Exercice 19.15 *Calcul de* $\boldsymbol{\zeta(2)}$ **Classique**

1. Montrer que

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

2. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,\pi]$,

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \frac{1}{2}\sin(Nt)\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2}\cos(Nt) - \frac{1}{2}$$

3. Soit f un application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

4. En déduire[1] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1. Cette formule est dûe à Euler (1736 et 1748)

Exercice 19.16
Nature et somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$.

Exercice 19.17 ❄
Discuter, sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \geq 2$, la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$$

Exercice 19.18
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 19.19 Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{2n} = \dfrac{2^{n-1}}{3^n} \\ u_{2n+1} = \dfrac{2^n}{3^{n+1}} \end{cases}$$

Nature de $\sum u_n$ et calcul de la somme si la série converge.

Exercice 19.20 Pour tout $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

1. Justifier l'existence de $S(x)$ pour tout $x > 0$.
2. Soit a et b tels que $0 < a < b$ et $(x, x_0) \in [a, b]^2$.
Montrer qu'il existe $C > 0$, indépendant de x et x_0, tel que

$$\big|S(x) - S(x_0)\big| \leq C|x - x_0|$$

En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer $\forall\, x > 0,\ S(x) - S(x+1) = \dfrac{1}{x^2}$.
En déduire un équivalent en 0 de S.
4. Avec une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de S en $+\infty$.

Familles sommmables

Exercice 19.21 Sommabilité et somme de la famille

$$\left(\frac{1}{(j+k^2)(j+k^2+1)}\right)_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$$

Exercice 19.22 Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{jk(j+k)}\right)_{(j,k)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.

Exercice 19.23
Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la famille suivante est sommable ?

$$\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$$

Exercice 19.24 Déterminer la somme de la famille suivante :

$$\left(\frac{j^k e^{-2j}}{k!}\right)_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$$

Exercice 19.25 Soit $x \in]-1, 1[$.
1. Montrer que la famille $(x^{jk})_{(j,k)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.
2. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$$

où $d(n)$ est le nombre diviseurs entiers naturels de n.

Exercice 19.26
Soient $a \in]-1, 1[$, $b \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = a^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}$.
1. Montrer que la famille (u_n) est sommable.
2. Déterminer la somme de la famille.