Corrigé du DM 20

Comparaison logarithmique

Soit (u_n), (v_n) deux suites à termes positifs non nuls

1. **Critère de comparaison logarithmique**

a) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$

$$0 \leq \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k}$$

Soit $n > N$, par produit d'inégalités pour $k \in [\![N, n-1]\!]$ et téléscopie, il vient

$$\prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_n}{u_N} \leq \prod_{k=N}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_n}{v_N}$$

donc $u_n \leq \dfrac{u_N}{v_N} v_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \text{ à partir d'un certain rang, alors } u_n = O(v_n).}$

b) Considérant la comparaison logarithmique $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang, alors $u_n = O(v_n)$, donc par comparaison de séries à termes positifs :

(i) si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,

(ii) si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

2. **Critère de d'Alembert**

On considère que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$ et posons $a = \dfrac{\ell+1}{2}$.

a) (i) Si $\ell < 1$, alors $\ell < a < 1$. La définition de la limite $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ pour $\varepsilon = a - \ell > 0$ donne qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon = a \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{a^{n+1}}{a^n}$$

Or $a \in [0, 1[$, la série $\sum a^n$ converge donc, par comparaison logarithmique, $\sum u_n$ converge.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \ell < 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ converge.}}$

(ii) Si $\ell > 1$, alors $1 < a < \ell$. La définition de la limite $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ pour $\varepsilon = \ell - a > 0$ donne qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$a = \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{a^{n+1}}{a^n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Or $a > 1$, la série $\sum a^n$ diverge donc, par comparaison logarithmique, $\sum u_n$ diverge.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \ell > 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ diverge.}}$

b) Quelques exemples :

- $\sum \dfrac{3^n}{n!}$ converge car $\dfrac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \dfrac{3}{n+1} \to 0 < 1$
- $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$ converge car $\dfrac{\frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{3^n}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} \to \dfrac{1}{3} < 1$

- $\sum \frac{n^n}{n!}$ diverge car $\dfrac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$

c) Cependant considérant une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$:

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^\alpha \to 1$$

Pour $\alpha = 2$ la série converge et pour $\alpha = \frac{1}{2}$ la série diverge.

Ainsi, $\boxed{\text{lorsque que } \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1\text{, la naturel est indéterminée.}}$

3. **Critère de Raabe-Duhamel**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad v_n = \frac{1}{n^\alpha}$; $\sum v_n$ est une série de Riemann.

a) Un développement asymptotique donne :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Il vient : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\alpha-\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \alpha \neq \beta\text{, alors } \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{\alpha-\beta}{n}.}$

b) Posons $\alpha = \frac{1+\beta}{2}$:

(i) si $\beta > 1$, alors $1 < \alpha < \beta$ et $\alpha - \beta < 0$.
Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{\alpha-\beta}{n}$, alors à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 0$.
Or $\sum v_n$ est converge (car $\alpha > 1$), donc par comparaison logarithmique, $\sum u_n$ converge.
Ainsi, $\boxed{\text{si } \beta > 1\text{, alors } \sum u_n \text{ converge.}}$

(ii) si $\beta < 1$, alors $\beta < \alpha < 1$ et $\alpha - \beta > 0$.
Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{\alpha-\beta}{n}$, alors à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 0$.
Or $\sum v_n$ est diverge (car $\alpha < 1$), donc par comparaison logarithmique, $\sum u_n$ diverge.
Ainsi, $\boxed{\text{si } \beta < 1\text{, alors } \sum u_n \text{ diverge.}}$

c) Quelques exemples autres que les séries de Riemann :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{n!}\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{n+1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{6\sqrt{n+1}^3} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}^4}\right)\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Le critère de Raabe-Duhamel donne que la série $\sum u_n$ diverge.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\right)^2$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Le critère de Raabe-Duhamel donne que la série $\sum u_n$ converge.

d) On pose $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^\alpha} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et $\varphi'(t) = -\dfrac{\ln(t)^\alpha + \alpha\ln(t)^{\alpha-1}}{\big(t\ln(t)^\alpha\big)^2} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{t^2\ln(t)^\alpha}$

Donc φ' est négative au voisinage de $+\infty$ et donc φ est décroissante au voisinage de $+\infty$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_{|[N,+\infty[}$ est décroissante.
Pour $k \geq N$, $k \leq t \leq k+1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(k+1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(k)$.
Par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi(k+1)\mathrm{d}t = \varphi(k+1) \leq \int_k^{k+1} \varphi \leq \varphi(k)$
Renversons l'inégalité ; pour $k \geq N+1$: $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi \leq \varphi(k) = u_k \leq \int_{k-1}^{k} \varphi$
Soit $n > N$, par sommation des inégalités pour $k \in [N+1, n]$ et la relation de Chasles, il vient :

$$\sum_{k=N+1}^{n} \int_k^{k+1} \varphi = \int_{N+1}^{n+1} \varphi \leq \sum_{k=N+1}^{n} \varphi(k) \leq \int_N^n \varphi$$

Comme $\ln \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, effectuons le changement de variable $x = \ln(t)$ alors

$$\int_N^n \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{\ln(N)}^{\ln(n)} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

- Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_{N+1}^{n+1} \varphi = [\ln(x)]_{\ln(N+1)}^{\ln(n+1)} = \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(N+1)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  Par comparaison, $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} \varphi(k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La série diverge.
- Si $\alpha \leq 1$, $\displaystyle\int_{N+1}^{n+1} \varphi = \left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{\ln(N+1)}^{\ln(n+1)} = \frac{1}{\big(\ln(n+1)\big)^{\alpha-1}} - \frac{1}{\big(\ln(N+1)\big)^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  Par comparaison, $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} \varphi(k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La série diverge.
- Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_N^n \varphi = \left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{\ln(N)}^{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)^{\alpha-1}} - \frac{1}{\ln(N)^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{\ln(N)^{\alpha-1}}$.

  Or, une suite convergente est majorée donc par transitivité, les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont majorées.
  Par CNS de convergence des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum \dfrac{1}{n\ln(n)^\gamma} \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R}^* \text{ converge si et seulement si } \gamma > 1.}$

e) Soit $\gamma \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \geq 2$, $w_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^\gamma}$

$$\begin{aligned}
\frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{n\ln(n)^\gamma}{(n+1)\ln(n+1)^\gamma} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{-\gamma} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1}\left(\frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^{-\gamma} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{-\gamma} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right)^{-\gamma} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{\gamma}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n} - \frac{\gamma}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les séries de Bertrand relèvent de la situation "}\beta = 1\text{" de Raabe-Duhamel.}}$

f) D'après ce qui précèdent,

- la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$ converge
- la série $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ diverge
- les deux séries sont dites de Bertrand et correspondent au cas $\beta = 1$ du critère de Raabe-Duhamel

Ainsi, $\boxed{\text{lorsque } \beta = 1\text{, la naturel est indéterminée.}}$

4. **Critère de Gauss**

Pour $n > -\alpha$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n+\alpha}$.

a) $\begin{aligned}\dfrac{v_{n+1}}{v_n} &= \dfrac{n+\alpha}{n+1+\alpha} = 1 - \dfrac{1}{n+\alpha+1} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+\alpha+1} \\ &= 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1+\alpha}{n(n+\alpha+1)} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1+\alpha}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$

Donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$\frac{1+\alpha}{n^2} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1+\alpha}{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

De plus, par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$:

$$-\frac{M}{n^2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{M}{n^2}$$

Il vient pour $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{2+\alpha+M}{n^2}$$

Cette démarche a été faite pour α quelconque. Considérons $\alpha \leq -3 - M$ alors à partir d'un certain rang, nous avons la comparaison logarithmique suivante :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Or $\dfrac{1}{n+\alpha} \sim \dfrac{1}{n}$, comme $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum v_n$ diverge.

Comme les suites sont à termes positifs à partir d'un certains rangs, les résultats de la question 1b) restent valables et donc, par comparaison $\sum u_n$ diverge.

Ainsi, $\boxed{\text{les séries vérifiant le critère de Gauss divergent.}}$

b) Le critère de Gauss n'est pas applicable aux séries de Bertrand. En effet, en reprenant le développement asymptotique du 3e) on a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - \frac{1}{n} \underbrace{- \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)}_{\notin O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$