

Variables aléatoires discrètes finies

On se limite au cas Ω fini, mais les résultats sont surtout formulés dans le cas où $X(\Omega)$ est fini et Ω pourrait être infini.

1 Vad finie, loi et fonction de répartition

1.1 Définition

Définition – Variable aléatoire discrète finie

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire discrète finie (vad finie) sur l'univers Ω à valeurs dans E toute application $X : \Omega \rightarrow E$.

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Remarque : Si Ω est fini, alors $X(\Omega)$ l'est de facto et on parle de *Variable Aléatoire Discrète Finie* : c'est la situation au programme cette année. Cependant, il se peut que $X(\Omega)$ soit fini alors que Ω est infini (dénombrable ou non).

NOTATION – L'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\}) = X^{-1}(\{x\})$ sera noté $(X = x)$ ou $\{X = x\}$.

Plus généralement, pour $A \subset E$, on note $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$ l'événement $X^{-1}(A)$ (image réciproque).

Ce qui donne les situations suivantes :

1. $(X \leq x)$ pour l'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x])$,
2. $\{x_1 \leq X \leq x_2\}$ pour l'événement $\{\omega \in \Omega, x_1 \leq X(\omega) \leq x_2\} = X^{-1}([x_1, x_2])$,
3. $(X^2 = 1) = ((X = 1) \text{ ou } (X = -1)) = (X = 1) \cup (X = -1)$

Exemple

On lance une pièce de monnaie 3 fois de suite. L'univers est

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

On note X le nombre de fois où on obtient *Pile*. X est alors une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Pour commencer $X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

Par exemple $X(PFP) = 2$.

On a $(X = 1) = \{PFF, FPF, FFP\}$ et $(X \leq 1) = \{PFF, FPF, FFP, FFF\}$.

Proposition - Définition – Système complet associé à une vad finie

Soit X une vad finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. On pose $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n = \text{Card}(X(\Omega))$.

Alors $((X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)) = ((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé système complet associé à X .

Démonstration –

- Les événements sont deux à deux incompatibles car par définition d'une application, si $i \neq j$ alors $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$.
- La réunion des événements est l'événement certain :

$$\boxed{\subset} \text{ La réunion d'événements est un événement : } \bigcup_{k=1}^n (X = x_k) \subset \Omega$$

$$\boxed{\supset} \text{ Pour } \omega \in \Omega, \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket; X(\omega) = x_i \text{ donc } \omega \in (X = x_i) \subset \bigcup_{k=1}^n (X = x_k). \text{ Ainsi, } \Omega \subset \bigcup_{k=1}^n (X = x_k).$$

Exemple

X étant la même vad finie que dans l'exemple précédent, $((X = 0), (X = 1), (X = 2), (X = 3))$ est le système complet d'événements associé à X .

1.2 Loi de probabilité

Définition – Loi de probabilité d'une v.a. discrète

Soit X une v.a. discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. On appelle loi de X l'application p_X de $X(\Omega)$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad p_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$$

Proposition – Soit p_X la loi d'une vad finie, alors :

- (i) pour tout $x \in X(\Omega)$, $p_X(x) \in [0, 1]$

$$(ii) \sum_{x \in X(\Omega)} p_X(x) = 1$$

$$(iii) \text{ Pour tout } A \subset X(\Omega), p_X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} p_X(x)$$

Démonstration –

(ii) Comme $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements $(\star)$

$$\sum_{x \in X(\Omega)} p_X(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) \stackrel{(\star)}{=} \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)\right) \stackrel{(\star)}{=} \mathbf{P}(\Omega) = 1$$

Remarques –

1. La loi p_X est entièrement déterminée par $(\mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.
2. En pratique, lorsqu'on demande la loi d'une variable, il convient de préciser $X(\Omega)$ et $\mathbf{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
3. On note $X \sim Y$ lorsque X et Y ont la même loi.

Exercice : Soit X, Y deux VADF et f une application. Montrer que $X \sim Y \Rightarrow f(X) \sim f(Y)$.

Exemples

1. On reprend l'exemple précédent où X est le nombre de fois où on obtient *Pile* lorsqu'on lance 3 fois une pièce de monnaie, en situation d'équiprobabilité. La loi de X est alors :

$$p_X(0) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{\text{Card}(X = 0)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(\{FFF\})}{8} = \frac{1}{8}$$

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{1}{8}$			

2. On lance 2 dés non pipés. L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$. On note Y la somme des 2 nombres obtenus. Pour déterminer la loi de Y , on commence par déterminer $Y(\Omega) : Y(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$. et par décrire $Y(\omega)$ grâce à un tableau à double entrée :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_Y(y)$											

Définition – Loi conditionnelle sachant un évènement

Soit X une vadf sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$. On appelle loi conditionnelle de X sachant A l'application :

$$p_{X|A} : \begin{cases} X(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \mathbf{P}(X = x|A) \end{cases}$$

1.3 Fonction de répartition

Définition – Fonction de répartition

Soit X une v.a., on appelle fonction de répartition de X l'application F_X de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice : Déterminer et tracer la fonction de répartition de la vad X (cf. ci-avant). Identifier des propriétés de cette courbe.

[3] à compléter

Solution –

Proposition – Soit F_X la fonction de répartition d'une v.a.d finie, alors :

- (i) F_X est une fonction en escaliers continue à droite (constante par morceaux),
- (ii) F_X est croissante,
- (iii) $F_X(x) = 0$ si $x < \min(X(\Omega))$ et $F_X(x) = 1$ si $x \geq \max(X(\Omega))$.

Démonstration –

2. Soient $x < y \in \mathbb{R}$, alors

$$]-\infty, x] \subset]-\infty, y] \Rightarrow (X \in]-\infty, x]) \subset (X \in]-\infty, y]) \Rightarrow \mathbf{P}(X \leq x) \leq \mathbf{P}(X \leq y) \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$$

1. On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ordonné :

Soit $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket : \forall x \in [x_i; x_{i+1}[$, on a $(X \leq x) = (X \leq x_i)$ donc $F_X(x) = F_X(x_i)$.

3. Si $x < x_1$, alors $(X < x_1) = \emptyset$ donc $F_X(x) = 0$.

Si $x \geq x_n$, alors $(X \leq x) = (X \leq x_n) = \Omega$ donc $F_X(x) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Remarque – Pour tout $x < y$, on a $\mathbf{P}(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$.

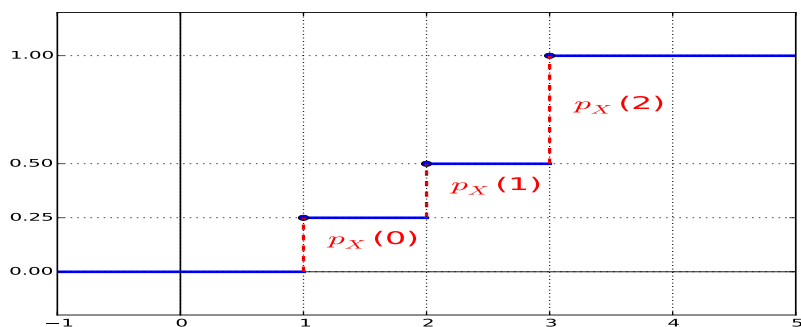
Proposition – La fonction de répartition d'une v.a.d finie caractérise sa loi de probabilité : $X \sim Y \Leftrightarrow F_x = F_y$.

$$\rightarrow F_X(y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leq y}} p_X(x) \text{ avec } (X \leq y) = \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leq y}} (X = x)$$

$$\rightarrow \text{Si } X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ (ordonné) alors } \begin{cases} p_X(x_1) &= F_X(x_1) \\ p_X(x_i) &= F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}), \forall i \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

Exemple

x	1	2	3
$p_X(x)$	0.25	0.25	0.5



La hauteur des marches correspondent à la loi de probabilité !

1.4 Exemples de détermination de loi

→ EXEMPLE 1 – Loi d'un maximum

Méthode

On lance deux fois de suite un dé équilibré. On note U la v.a.d égale au plus grand nombre obtenu.

On a $U(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Pour déterminer la loi de U , on s'intéresse à sa **fonction de répartition**.

Soient A_k l'événement «obtenir au plus k au premier lancer» et B_k l'événement «obtenir au plus k au second lancer»

pour $1 \leq k \leq 6$.

Soit $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, alors par indépendance^(*) :

$$F_U(k) = \mathbf{P}(U \leq k) = \mathbf{P}(A_k \cap B_k) =^{(*)} \mathbf{P}(A_k) \mathbf{P}(B_k) = \frac{k^2}{36}$$

Ainsi $\mathbf{P}(U = 1) = \mathbf{P}(U \leq 1) = \frac{1}{36}$, $\mathbf{P}(U = 2) = \mathbf{P}(U \leq 2) - \mathbf{P}(U \leq 1) = \frac{2^2 - 1}{36} = \frac{3}{36}$

pour $k \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$, $\mathbf{P}(U = k) = F_U(k) - F_U(k-1) = \frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}$.

La loi de U est donnée par la tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$p_U(k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Remarque – Dans le cas présent, on aurait pu utiliser une tableau à deux entrées ...

Exercice : Loi du minimum

Méthode

On lance 3 fois de suite un tétraèdre dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note V la v.a.d. égale au plus petit nombre obtenu. Déterminer la loi de V .

[4] à compléter

Solution –

Remarque – Soit X une v.a.d. sur Ω et $\varphi : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ alors $\varphi \circ X$ est une v.a.d. sur Ω .

→ EXEMPLE 2 – **Loi de $Y = -2X + 3$**

Soit X une v.a.d. dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	-1	0	2	3
$p_X(k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$

On veut déterminer la loi de $Y = -2X + 3$. On a $Y(\Omega) = \{-3, -1, 3, 5\}$ et

$$\mathbf{P}(Y = -3) = \mathbf{P}(-2X + 3 = -3) = \mathbf{P}(X = 3) = \frac{2}{5}$$

La loi de Y est donc donnée par le tableau suivant :

k	-3	-1	3	5
$p_Y(k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$

→ EXEMPLE 3 – **Loi de $T = S^2$**

Soit S une v.a.d. dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	-1	0	1	2
$p_S(k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On veut déterminer la loi de $T = S^2$. On a $T(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

$$\mathbf{P}(T = 4) = \mathbf{P}(S^2 = 4) = \mathbf{P}(S = 2 \text{ ou } S = -2) = \mathbf{P}(S = -2) + \mathbf{P}(S = 2) = \frac{1}{12}$$

La loi de T est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	4
$p_T(k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$

2 Espérance. Variance

2.1 Espérance

2.1.1 Définition, propriétés et exemples

Remarque – Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini où $\mathbf{P}$ est la probabilité uniforme. Soit X est une v.a. finie sur cet espace, alors la moyenne des valeurs $X(\omega)$ lorsque ω parcourt Ω est :

$$m = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{P}(\{\omega\}),$$

En notant $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et en regroupant les ω pour lesquels X prend la même valeur, il vient :

$$m = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\text{Card}(X = x_i)}{\text{Card}(\Omega)} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{P}(X = x_i)$$

En probabilités, cette moyenne est appelée espérance de X . Elle se généralise au cas où $\mathbf{P}$ est une probabilité quelconque, grâce à la définition suivante :

Définition – **Espérance d'une v.a. discrète**

Soit X une v.a. finie, On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. On appelle espérance de X et on note $\mathbf{E}(X)$ la quantité :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{P}(\{\omega\})$$

Remarque –

- La dernière égalité se déduit par regroupement des événements élémentaires qui ont la même image par X .
- L'espérance de X ne dépend que de sa loi, autrement dit deux v.a. finies ayant même loi auront même espérance.

Proposition – Soit X, Y deux v.a. finies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on a :

- $\min(X(\Omega)) \leq \mathbf{E}(X) \leq \max(X(\Omega))$
- Positivité : si $X \geq 0$ alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$,
- si X est une variable constante alors $\mathbf{E}(X)$ vaut cette constante.
- Linéarité : L'espérance est linéaire
- Croissance : si $X \leq Y$ alors $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$.

[5] à compléter

Démonstration –

Exemple

Considérons la v.a. U égale au plus grand nombre obtenu lorsqu'on lance deux fois de suite un dé équilibré. L'espérance de U vaut :

$$\mathbf{E}(U) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36}$$

Exercice : Soit X une v.a. finie. Que vaut $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X))$?

[6] à compléter

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\mathbf{E}(X)^3$ ☐ $\mathbf{E}(X^3)$ ☐ autre : ...

2.1.2 Espérance de $g(X)$

Théorème – Théorème de transfert

Soient X une vad finie avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $g(X)$ est une vad finie d'espérance :

$$\mathbf{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbf{P}(X = x)$$

Démonstration –

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbf{P}(X = x) &= \sum_{y \in g(X(\Omega))} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y = g(x)}} g(x) \mathbf{P}(X = x) && \text{on regroupe suivant les } g(x_i) \text{ identiques} \\ &= \sum_{y \in g(X(\Omega))} y \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y = g(x)}} \mathbf{P}(X = x) \\ &= \sum_{y \in g(X(\Omega))} y \mathbf{P}\left(\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y = g(x)}} (X = x)\right) && \text{car les } (X = x)_{x \in X(\Omega)} \text{ sont incompatibles} \\ &= \sum_{y \in g(X(\Omega))} y \mathbf{P}(g(X) = y) = \mathbf{E}(g(X)) \end{aligned}$$

Remarque – Le théorème de transfert donne l'espérance de $g(X)$ en fonction de la loi de X .

Corollaire – Inégalité triangulaire Soit X une vadf; alors, $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$.

Corollaire – Soient X une vad finie et $a, b \in \mathbb{R}^2$ alors $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$

[7] à compléter

Démonstration –

Exemple

On reprend un exemple ci-avant : Soit S une vad de loi :

k	-1	0	1	2
$p_S(k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Déterminons l'espérance de $T = S^2$:

- Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(S^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{12} + 2^2 \times \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

- Par la loi de T : on rappelle la loi de T et donc

$$\mathbf{E}(T) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{7}{12} + 4 \times \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

k	0	1	4
$p_T(k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$

Exercice : Considérons D le résultat d'un dé (équilibré à 6 faces). Donner l'espérance de $X = \exp(D)$.

[8] à compléter

Solution –

Exercice : Considérons la va Z de loi :

z	-2	-1	0	1	2
$p_Z(z)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

Déterminer l'espérance de $W = Z^2 - 3|Z| + 2$.

[9] à compléter

Solution –

Définition – Variable centrée

Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle.

2.1.3 Inégalité de Markov

Théorème – Inégalité de Markov

Soit X une v.a.d. finie, alors pour tout $\alpha, p \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|^p)}{\alpha^p}$

[10] à compléter

Démonstration –

Le théorème de transfert^(*) donne

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|X|^p) &= \sum_{\substack{x \in X(\omega) \\ |x| \geq \alpha}} |x|^p \mathbf{P}(X=x) + \sum_{\substack{x \in X(\omega) \\ |x| < \alpha}} \underbrace{|x|^p \mathbf{P}(X=x)}_{\dots} \\ &\geq \sum_{\substack{x \in X(\omega) \\ |x| \geq \alpha}} \alpha^p \mathbf{P}(X=x) = \alpha^p \sum_{\substack{x \in X(\omega) \\ |x| \geq \alpha}} \mathbf{P}(X=x) \stackrel{(\#)}{=} \alpha^p \mathbf{P}(|X| \geq \alpha) \end{aligned}$$

avec ^(#) car les $(X=x)_{x \in X(\Omega)}$ sont incompatibles.

Exercice : On considère n lancers d'une pièce et X le nombre de piles obtenus. L'espérance de X est $\frac{n}{2}$.

Donner une estimation de la probabilité que le nombre de piles dépasse $\frac{2n}{3}$.

[11] à compléter

Solution –

2.2 Moments, variance

2.2.1 Définitions

Définition – Moments et moments centrés d'ordre r

Soient X une v.a.d. finie et $r \in \mathbb{N}$, on appelle *moment d'ordre r de X* le réel $m_r(X) = \mathbf{E}(X^r)$ et *moment centré d'ordre r de X* le réel $\mu_r(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^r)$,

Remarque – Le moment d'ordre 1 de X est l'espérance de X .

Définition – Variance

Soit X une v.a.d. finie, on appelle *variance de X* le réel positif $\mathbf{V}(X) = \mu_2(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$ et *écart-type de X* le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$

Remarques –

1. Retenir que la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire sont des nombres positifs.
2. La variance et l'écart-type sont des mesures de la dispersion d'une variable aléatoire autour de son espérance : asymétrie (étalement à gauche, à droite); aplatissement (pointue, normale).

Définition – Variable réduite

Soit X une v.a.d. finie, on dit que X est *réduite* si $\mathbf{V}(X) = 1$.

Exercice : Montrer que $\mathbf{V}(X) = 0 \iff X$ est constante $\implies X = \mathbf{E}(X)$.

[12] à compléter

Solution –

2.2.2 Calcul de la variance

Théorème – Formule de Koenig-Huygens

Soit X une v.a.d. finie, alors $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$.

[13] à compléter

Démonstration –Posons $m = \mathbf{E}(X)$.

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - m)^2) = \mathbf{E}(X^2 - 2mX + m^2)$$

On pose $g : x \mapsto x^2 - 2mx + m^2$; le théorème de transfert donne :

■

Proposition – Soient X une v.a.d. finie et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$ **Démonstration –**

$$\mathbf{V}(aX + b) = \mathbf{E}((aX + b - \mathbf{E}(aX + b))^2) = \mathbf{E}((aX - a\mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(a^2(X - \mathbf{E}(X))^2) = a^2 \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = a^2 \mathbf{V}(X)$$

■

Corollaire – Soient X une v.a.d. finie et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.**Proposition –** Soit X une v.a.d. finie de variance non nulle. Alors $\frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est la v.a.d. centrée réduite associée à X .**Exercice :** Soit X une v.a.d. dont la loi est donnée par :

x	0	1	3
$P_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Donner la loi de X^* la variable centrée réduite associée à X .

[14] à compléter

Solution –

■

2.2.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème – Inégalité de Bienaymé-TchebychevSoit X une v.a.d. finie, alors pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha^2}.$$

[15] à compléter

Démonstration –

Mettre en oeuvre l'inégalité de Markov ...

■

Remarques –

1. Cette inégalité confirme l'intérêt de la variance comme mesure de la dispersion d'une variable aléatoire autour de son espérance.

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \alpha) = \mathbf{P}(X \notin [\mathbf{E}(X) - \alpha, \mathbf{E}(X) + \alpha])$$

2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de contrôler la probabilité qu'une v.a. soit « loin » de son espérance. Elle donne un résultat théorique fort mais son application numérique n'est pas très efficace.

3. Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev peuvent être strictes.

Exercice :On effectue n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Soit X le nombre de fois où on obtient *Pile*, $\frac{X}{n}$ désigne donc la fréquence d'apparition de *Pile*.

Déterminer n pour qu'on puisse affirmer que cette fréquence est comprise strictement entre 0,45 et 0,55 avec une probabilité d'au moins 0,9.

[16] à compléter

Solution –

3 Lois usuelles

La reconnaissance de situations modélisées par les lois classiques est une capacité attendue.

3.1 Loi uniforme

Définition – **Loi uniforme**

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la loi uniforme sur E , noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$, si

$$X(\Omega) = E \text{ et } \forall x \in E, \quad \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{n}$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

Plus généralement, soit $a, b \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a < b$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ si $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket$, $\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$.

MODÉLISATION –

Soit une expérience aléatoire comportant n issues équiprobables numérotées de 1 à n .

Alors la v.a.d. finie égale au numéro de l'issue se réalisant suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Exemples

1. On lance un dé équilibré. La v.a.d. finie égale au chiffre obtenu suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.
2. Une urne comporte 10 boules numérotées de -3 à 6 . La v.a.d. égale au numéro de la boule extraite suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket -3, 6 \rrbracket)$.

Proposition – Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ avec $n = b - a + 1$ alors $Y = X + a - 1$.

Proposition – Soit X une v.a.d. finie suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

[17] à compléter

Démonstration –

Calculer $\mathbf{E}(X)$, puis $\mathbf{E}(X^2)$ et en déduire $\mathbf{V}(X)$.

Exercices :

1. Déterminer la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
2. Tracer la fonction de répartition de $\mathcal{U}(\llbracket 1, 5 \rrbracket)$.
3. Si $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$, déterminer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$.

Prog

[18] à compléter

Solution –

3.2 Loi de Bernoulli

Définition – Loi de Bernoulli

Soient $p \in [0, 1]$ et X une v.a. finie. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et si $\mathbf{P}(X = 1) = p$. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ (ou encore $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$).

MODÉLISATION –

Soit une épreuve ayant deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1 - p$.

Alors la v.a. finie valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la loi $\mathcal{B}(p)$.

Remarque – Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = \{0, 1\}$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où $p = \mathbf{P}(X = 1)$.

x	0	1
$P_X(x)$	$1 - p$	p

Considérons la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ avec $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors

$$\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ avec } p = \mathbf{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbf{P}(A)$$

Autrement dit, considérant un événement A d'une épreuve aléatoire, la réalisation de A est considérée comme succès, sa non réalisation comme échec.

Exemples

1. On lance une pièce de monnaie donnant *Pile* avec probabilité p . Alors la v.a. finie X valant 1 si on obtient *Pile* et 0 si on obtient *Face* suit la loi $\mathcal{B}(p)$.

2. Soit une urne contenant 10 boules vertes et 5 noires. On tire une boule au hasard, soit X la v.a. finie valant 1 si on obtient une boule verte et 0 si on tire une boule noire. Alors X suit la loi $\mathcal{B}(\frac{2}{3})$. X est la fonction indicatrice de l'événement «obtenir une boule verte».

Proposition – Soit X une v.a. finie suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, alors :

$$\mathbf{E}(X) = p, \quad \mathbf{V}(X) = p(1 - p) = pq \text{ avec } q = 1 - p$$

En particulier $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.

Démonstration –

On a $\mathbf{E}(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$, $\mathbf{E}(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$.
La formule de Koenig-Huygens donne $\mathbf{V}(X) = p - p^2 = p(1 - p)$.

Exercice : Tracer la fonction de répartition de X où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{3})$.

3.3 Loi binomiale

Définition – Loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$ et X une v.a. finie. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et si :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Remarques –

1. La loi binomiale de paramètre $(1, p)$ est la loi de Bernoulli de paramètre p .

2. $\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k) = 1$ est la formule du binôme (avec $1^n = (p + (1 - p))^n$).

MODÉLISATION –

Soit une expérience aléatoire se déroulant en n épreuves indépendantes de Bernoulli de même paramètre p .

Soit X la v.a. finie comptant le nombre de succès au cours des n épreuves suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Tout d'abord $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on cherche $\mathbf{P}(X = k)$.

Procédons par disjonction de cas selon la répartition des succès parmi les n épreuves : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités de choisir sans ordre et sans répétition les places des k succès parmi les n épreuves. De plus chaque résultat compte k succès, chacun de probabilité p , et $n - k$ échecs, chacun de probabilité $1 - p$; par indépendance des épreuves la probabilité d'un résultat est donc la même pour chaque répartition : $p^k(1 - p)^{n-k}$.

Ainsi, on trouve $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Exemples

1. On lance n fois une pièce donnant *Pile* avec probabilité p . Le nombre de fois où on obtient *Pile* suit alors la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2. On effectue n tirages **avec** remise dans une urne contenant 10 boules vertes et 5 noires. Le nombre de boules vertes obtenues suit la loi $\mathcal{B}(n, \frac{2}{3})$.

Remarque – La loi binomiale est également appelée loi des tirages avec remise.

Proposition – Soit X une v.a.d finie suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$ alors :

$$\mathbf{E}(X) = np, \quad \mathbf{V}(X) = np(1 - p).$$

Démonstration –

Introduisons la fonction $\varphi : x \mapsto (1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. En dérivant on obtient :

$$\varphi'(x) = n(1 + x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} \text{ et } \varphi''(x) = n(n-1)(1 + x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$$

- Calcul de $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^{k-1} (1 - p)^{n-k} \frac{(1 - p)^{n-1}}{(1 - p)^{k-1}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= (1 - p)^{n-1} p \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1 - p} \right)^{k-1} = (1 - p)^{n-1} p \varphi' \left(\frac{p}{1 - p} \right) \\ &= (1 - p)^{n-1} p n \left(1 + \frac{p}{1 - p} \right)^{n-1} = np(1 - p + p)^{n-1} = np \end{aligned}$$

- Calcul de $\mathbf{E}(X^2)$ par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{on note que } k^2 = k(k-1) + k \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}_{\alpha} + \underbrace{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}_{=np} \\ \alpha &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (1 - p)^{n-2} p^2 \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1 - p} \right)^{k-2} \\ &= (1 - p)^{n-2} p^2 \varphi'' \left(\frac{p}{1 - p} \right) = (1 - p)^{n-2} p^2 n(n-1) \left(1 + \frac{p}{1 - p} \right)^{n-2} = p^2 n(n-1) \\ \mathbf{E}(X^2) &= p^2 n(n-1) + np \end{aligned}$$

- Calcul de $\mathbf{V}(X)$ par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = p^2 n(n-1) + np - (np)^2 = np(p(n-1) + 1 - np) = np(1 - p)$$

Exercice : Rédiger une preuve de la proposition précédente en utilisant les propriétés du coefficient binomial :

$$k, n \in \dots, \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2}$$

4 Couples de variables aléatoires

4.1 Généralités

4.1.1 Définition

Définition – Couple de v.a.d

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle couple de v.a.d sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tout couple $Z = (X, Y)$ où X et Y sont des v.a.d sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Remarques –

1. On note $Z(\Omega) = \{(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
2. Il ne s'agit pas dans ce chapitre d'étudier X et Y séparément - la notion de couple n'aurait alors aucun intérêt - mais d'étudier les liens entre X et Y .
3. L'événement $(X = x) \cap (Y = y)$ est également noté $(X = x, Y = y)$.

Exemples

1. On choisit au hasard un élève de la classe. Soit X sa taille exprimée en *cm* et Y son poids exprimé en *kg*. Alors (X, Y) est un couple de v.a.d.
2. On lance une pièce n fois, donnant Pile avec probabilité p . Soit X (resp. Y) le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première (resp. deuxième) fois Pile ou 0 si cela ne se produit pas. Alors (X, Y) est un couple de v.a.d. On a $(X, Y)(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket^2$.

Proposition - Définition – Système complet associé à un couple de v.a.d

Soit (X, Y) un couple de v.a.d finie. La famille $((X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé système complet associé au couple (X, Y) .

4.1.2 Loi conjointe

Définition – Loi conjointe d'un couple de v.a.d

Soit (X, Y) un couple de v.a.d défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On appelle loi conjointe du couple la fonction :

$$p_{(X,Y)} : \begin{cases} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \rightarrow & [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto & \mathbf{P}(X = x, Y = y) \end{cases}$$

Exemples

1. Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On effectue 2 tirages sans remise. Soit X le numéro obtenu au premier tirage et Y le numéro obtenu au second tirage. La loi de (X, Y) est donnée par le tableau :

		Y		
	X \ Y	1	2	3
	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

On vérifie que la somme des valeurs obtenues vaut 1.

2. Retour sur l'exemple du lancer de n pièce. La loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$p_Z(0, 0) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(F_i) = (1-p)^n \text{ par indépendance des lancers}$$

$$\text{si } 1 \leq j < k \leq n \text{ alors } p_Z(j, k) = (1-p)^{j-1}p(1-p)^{k-j-1}p = p^2(1-p)^{k-2}$$

$$\text{si } 1 \leq k \leq j \leq n \text{ alors } p_Z(j, k) = 0$$

$$\text{si } 1 \leq i \leq n \text{ alors } p_Z(i, 0) = p(1-p)^{n-1} \text{ et } p_Z(0, i) = 0$$

4.1.3 Lois marginales

Définition – Lois marginales

Soit (X, Y) un couple de vad. Les lois de X et Y sont appelées lois marginales du couple.

Théorème – Soit (X, Y) un couple de vad finie. Les lois marginales sont données par :

$$\begin{aligned} \forall x \in X(\Omega), \quad p_X(x) = \mathbf{P}[X = x] &= \sum_{y \in Y(\Omega)} p_{(X,Y)}(x, y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}[X = x, Y = y] \\ \forall y \in Y(\Omega), \quad p_Y(y) = \mathbf{P}[Y = y] &= \sum_{x \in X(\Omega)} p_{(X,Y)}(x, y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}[X = x, Y = y] \end{aligned}$$

Démonstration –

Formule des probabilités totales utilisant le système complet associé à l'autre variable

Méthode

[19] à compléter

Exercices :

1. Compléter le tableau des lois marginales dans le premier exemple ci-dessus :

$X \backslash Y$	1	2	3	loi de X
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	
loi de Y				

2. Déterminer la loi marginale de X dans le second exemple :

Remarques –

- Une loi marginale se déduit de la loi conjointe par une somme des termes sur la ligne ou la colonne correspondante.
- La réciproque est fautive : il n'est pas possible de reconstruire la loi conjointe à partir des lois marginales.

[20] à compléter

Exercice : Considérons deux lois marginales, compléter de deux façons différentes la loi conjointe :

$X \backslash Y$	1	2	loi de X
1			$\frac{1}{3}$
2			$\frac{2}{3}$
loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$X \backslash Y$	1	2	loi de X
1			$\frac{1}{3}$
2			$\frac{2}{3}$
loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

4.1.4 Lois conditionnelles

Définition – Lois conditionnelles

Soit (X, Y) un couple de v.a.d de loi conjointe $p_{(X, Y)}$.
Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$, on appelle loi de Y sachant $(X = x)$ l'application :

$$p_{Y|X=x} : \begin{cases} Y(\Omega) & \rightarrow & [0, 1] \\ y & \mapsto & \frac{p_{X, Y}(x, y)}{p_X(x)} \end{cases} \quad \text{car } \mathbf{P}(Y = y|X = x) = \frac{p_{X, Y}(x, y)}{p_X(x)}$$

[21] à compléter

Exercice : Considérons le lancer de deux dés, X le résultat du premier dé et Y celui du second. Posons $U = \max(X, Y)$. Déterminer les lois du couple (X, U) avec $(X, U)(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$: loi conjointe, lois marginales, loi de U sachant $(X = 4)$ et loi de X sachant $(U = 3)$:

$X \backslash U$	1	2	3	4	5	6	loi de X
1							
2							
3							
4							
5							
6							
loi de U							

La loi de U sachant $(X = 4)$ s'obtient ...

u	1	2	3	4	5	6
$p_{U X=4}(z)$						

La loi de X sachant $(U = 3)$ s'obtient ...

x	1	2	3	4	5	6
$p_{X U=3}(x)$						

Remarque – Les conditionnelles se déduisent des lignes ou colonnes de la table de la loi conjointe.

Exercice : On considère un magasin qui possède 4 caisses. Soit X la v.a.d donnant le nombre de clients entrant dans le magasin. Chaque client choisi sa caisse aléatoirement et indépendamment des autres. On note Y le nombre de clients qui sont passés à la deuxième caisse. Quelle est la loi de Y sachant $(X = n)$.

[22] à compléter

Solution – ■

4.1.5 Indépendance de deux vad

Définition – Indépendance de deux vad

Soit (X, Y) un couple de vad. On dit que X et Y sont indépendantes, noté $X \perp\!\!\!\perp Y$, lorsque, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad p_{(X,Y)}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

Exercice : Lesquels de ses couples sont formés de vad indépendantes ?

$X \backslash Y$	1	2	loi de X
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$
loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$X \backslash Y$	1	2	loi de X
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$
loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$X \backslash Y$	1	2	loi de X
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Quel critère portant sur la table de la loi conjointe donne que les variables sont indépendantes ?

[23] à compléter

Solution –

Proposition – Soit X, Y deux vad indépendantes, $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$:

- (i) la loi du couple (X, Y) est donnée par le produit des deux lois marginales
- (ii) $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exercice : Déterminer a, b, c et d pour que X et Y soient indépendantes

$X \backslash Y$	-1	0	1	loi de X
0	a	b	$\frac{1}{6}$	$a + b + \frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	c	d	$\frac{2}{3}$
loi de Y	$\frac{1}{4}$	$b + c$	$d + \frac{1}{6}$	

[24] à compléter

Solution –

Proposition – X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, alors $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Exemple

Si X et Y sont indépendantes, alors :

- $\mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbf{P}(X \leq x)\mathbf{P}(Y \leq y)$ et en particulier :

$$F_{\max(X,Y)}(t) = \mathbf{P}(\max(X, Y) \leq t) = \mathbf{P}(X \leq t \text{ et } Y \leq t) = F_X(t)F_Y(t)$$

Méthode

- $\mathbf{P}(X > x, Y > y) = \mathbf{P}(X > x)\mathbf{P}(Y > y)$ et en particulier :

$$1 - F_{\min(X,Y)}(t) = \mathbf{P}(\min(X, Y) > t) = \mathbf{P}(X > t \text{ et } Y > t) = (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t))$$

4.2 Espérance de $g(X, Y)$, covariance

4.2.1 Espérance de $g(X, Y)$

Remarque – On rappelle la définition de l'espérance avec X et Y sont des v.a.d finies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : g(X, Y)$ est une v.a.d finie et

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega), Y(\omega)) \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{t \in g(X, Y)(\Omega)} t \mathbf{P}(g(X, Y) = t)$$

Théorème – Théorème de transfert

Soient (X, Y) un couple de v.a.d finies et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On pose $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_q\}$, alors

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q g(x_i, y_j) \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}(X = x, Y = y)$$

Exercice : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est donnée par :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

Déterminer l'espérance de $Z = \max(X, Y)$.

[25] à compléter

Solution –

[26] à compléter

Exercice : Dans les situations suivantes, comparer $\mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(Y_i)$ et $\mathbf{E}(X_i Y_i)$, déterminer les couples de variables indépendantes :

$X_1 \backslash Y_1$	-1	0	1	loi de X_1
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	
loi de Y_1				

$X_2 \backslash Y_2$	-1	0	1	loi de X_2
-1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	
0	0	$\frac{1}{6}$	0	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
loi de Y_2				

$X_3 \backslash Y_3$	-1	0	1	loi de X_3
-1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{8}$	
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	
1	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{7}{24}$	
loi de Y_3				

Solution –

Proposition – Soit X et Y deux v.a.d finies **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, alors $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

Démonstration –

L'indépendance de X et Y donne que $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$ donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} xy \mathbf{P}(X = x, Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy \mathbf{P}(X = x) \mathbf{P}(Y = y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x) \sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbf{P}(Y = y) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y)\end{aligned}$$

Remarque – La réciproque est fautive. L'exemple précédent, (X_3, Y_3) , est un contre-exemple.

4.2.2 Covariance

Définition – **Covariance de deux v.a.d finies**

Soit (X, Y) un couple de v.a.d finies. On appelle covariance de X et de Y le nombre réel :

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\right)$$

Remarque – Contrairement à une variance, une covariance peut être strictement négative.

Proposition – Soit (X, Y) un couple de v.a.d finies, alors $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

Démonstration –

Utilisant la linéarité^(*) de l'espérance, il vient

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\right) = \mathbf{E}\left(XY - \mathbf{E}(X)Y - X\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)\end{aligned}$$

Exercice : Considérons X de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et Y définie par $Y = 1$ si $X = 0$ et $Y = 0$ sinon. Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

[27] à compléter

Solution –

Proposition – Si X, Y et Z sont des v.a.d finies et λ et μ des réels, on a :

- (i) $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$
- (ii) *Symétrie* : $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$
- (iii) *Linéarité à gauche* : $\mathbf{Cov}(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda \mathbf{Cov}(X, Z) + \mu \mathbf{Cov}(Y, Z)$
- (iv) *Linéarité à droite* : $\mathbf{Cov}(Z, \lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{Cov}(Z, X) + \mu \mathbf{Cov}(Z, Y)$
- (v) $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + 2\mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$

Remarque – La covariance est aussi linéaire par rapport à sa deuxième variable : on dit qu'elle est bilinéaire.

[28] à compléter

Démonstration –

Prouver le (ii), (iii) et (v).

Démonstration –

- (ii) : $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(YX) - \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(X) = \mathbf{Cov}(Y, X)$.
- (iii) : $\mathbf{Cov}(\lambda X + \mu Y, Z) = \mathbf{E}((\lambda X + \mu Y)Z) - \mathbf{E}(\lambda X + \mu Y)\mathbf{E}(Z) \stackrel{(*)}{=} \lambda \mathbf{E}(XZ) + \mu \mathbf{E}(YZ) - \lambda \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Z) - \mu \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(Z)$
 $= \lambda (\mathbf{E}(XZ) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Z)) + \mu (\mathbf{E}(YZ) - \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(Z)) = \lambda \mathbf{Cov}(X, Z) + \mu \mathbf{Cov}(Y, Z)$
- (v) : $\mathbf{V}(X + Y) \stackrel{(iii)}{=} \mathbf{Cov}(X + Y, X + Y) = \mathbf{Cov}(X, X + Y) + \mathbf{Cov}(Y, X + Y)$
 $\stackrel{(iv)}{=} \mathbf{Cov}(X, X) + \mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{Cov}(Y, X) + \mathbf{Cov}(Y, Y)$
 $\stackrel{(i) \text{ et } (ii)}{=} \mathbf{V}(X) + 2\mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$

Corollaire – Soit X et Y deux v.a.d finies *indépendantes* sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, alors

$$\mathbf{Cov}(XY) = 0 \text{ et } \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$$

Exercice : Soit X et Y deux v.a. finies indépendantes et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Développer $\mathbf{V}(\alpha X + \beta Y)$.

[29] à compléter

Solution –

Exercice : Donner un contre-exemple illustrant que la réciproque est fautive : $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ n'implique pas que X et Y sont indépendantes.

[30] à compléter

Solution –

Exercice : Considérons deux v.a. X et Y telles que $\mathbf{V}(X) = 2$, $\mathbf{V}(Y) = 3$ et $\mathbf{V}(X + Y) = 4$. Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

[31] à compléter

Solution –

4.3 Extension aux n -uplets de v.a. finies

Définition – n -uplets de v.a. finies

Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. finies.

(i) La loi conjointe du n -uplet $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est définie par :

$$\forall (x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega), \quad \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right)$$

(ii) On dit que les $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont (mutuellement) indépendantes lorsque :

$$\forall (x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega), \quad \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

Proposition – Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. finies indépendantes.

(i) Pour toute famille $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_i \subset X_i(\Omega)$, les événements $((X_i \in A_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont indépendants.

(ii) Pour tout $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, alors les $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes.

(iii) **Lemme des coalitions** Soit $f : X_1(\Omega) \times \dots \times X_k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X_{k+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ alors :

a) les v.a. $Y = f(X_1, \dots, X_k), X_{k+1}, \dots, X_n$ sont indépendantes,

b) les v.a. $Y = f(X_1, \dots, X_k)$ et $Z = g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

$$(iv) \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)$$

Remarques –

1. Les $X_1, \dots, X_n$ peuvent être 2 à 2 indépendantes, sans être (mutuellement) indépendantes.

2. Le lemme des coalitions se généralise à plusieurs regroupements 2 à 2 disjoints de v.a. indépendantes : $f_1, f_2, \dots$

Proposition – Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. finies, alors

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j)$$

[32] à compléter

Démonstration –

Corollaire – Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes 2 à 2, alors $\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \dots + \mathbf{V}(X_n)$.

Proposition – Stabilité de la loi binomiale

1. Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $S = \sum_{k=1}^n X_k$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{E}(X_i) = p \text{ et } \mathbf{V}(X_i) = p(1-p) \Rightarrow \mathbf{E}(S) = \sum_{k=1}^n p = np \text{ et } \mathbf{V}(S) = \sum_{k=1}^n p(1-p) = np(1-p)$$

2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$. Si X et Y sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

Démonstration –

On peut interpréter chaque variable comme la somme de variables mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli. ■

Exercice : Établir la stabilité de la loi binomiale par le calcul.

Théorème – **Loi faible des grands nombres**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite infinie de vadf 2 à 2 indépendantes de même espérance m et de même variance σ^2 . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

[33] à compléter

Démonstration –

Remarque – Ce résultat fait le lien entre la probabilité et la notion de fréquence en statistique : considérant la variable indicatrice associé à un événement de probabilité p et une suite d'épreuves de Bernoulli associées alors $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \rightarrow p$. ■