Colle 31

Les questions "★" sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

EXTRAIT DU PROGRAMME

1. FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

A. OUVERTS DE $\mathbb{R}^2$, FONCTIONS CONTINUES

Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique.

Ouverts.

Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface.

La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.

B. DÉRIVÉES PARTIELLES

Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert.

Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

Notations $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.

Définition par la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.

Démonstration hors programme.

On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation de

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.

Notation $\nabla f(x_0, y_0)$.

Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Expression du développement limité à l'aide du gradient.

C. DÉRIVÉES PARTIELLES ET COMPOSÉES

Dérivée selon un vecteur.

Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle$.

Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$.

Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f .

Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

D. EXTREMUMS

Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.

Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.

Exemples d'étude de points critiques.