Colle 29

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Extrait du programme

Groupe symétrique et déterminants

1. Groupe symétrique

Le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.

a. Généralités

Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, ..., n\}$.	Notation S_n.
Cycle, transposition.	Notation $(a_1, a2, \dots, a_p)$.
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.

b. Signature d'une permutation

Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.	
Signature : il existe un unique morphisme de groupe de S_n dans $\{-1, 1\}$ envoyant toute transposition sur -1.	La démonstration n'est pas exigible.

2. Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

1. introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;

2. établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;

3. indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.

a. Formes n-linéaires alternées

Forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.
Antisymétrie, effet d'une permutation.	Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

b. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Si e est une base, il existe une unique forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$; toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$	
La famille $(x_1, ..., x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1, ..., x_n) \neq 0$.	

c. Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.

d. Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
Caractérisation des matrices inversibles.	
L'application det induit un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) sur $\mathbb{K}^*$.	
Déterminant d'une transposée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

e. Calcul des déterminants

Effet des opérations élémentaires.	
Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.	

Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec les polynômes de Lagrange.

F. Comatrice

Comatrice.	Notation $\mathrm{Com}(A)$
Relation $A\mathrm{Com}(A)^{\mathrm{T}} = \mathrm{Com}(A)^{\mathrm{T}} A = \det(A)\, I_n$.	Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

Méthodes et savoir-faire

- Calculer un déterminant :
  - d'une matrice de taille 3×3 avec la règle de Sarrus
  - en utilisant les opérations élémentaires
  - en développant suivant une ligne ou une colonne
- Utiliser les propriétés de n linéarité, d'antisymétrie

Questions de cours

➜ Permutation (+notation), p-cycle (+notation), transposition, orbite. Théorème de décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints, signature. Donner des exemples.

➜ Forme n-linéaire alternée, antisymétrique, propriétés.

★ Introduire $\det_{\mathcal{B}}$ et montrer que toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$.

➜ Déterminant d'une famille de vecteurs, propriétés

➜ Déterminant d'un endomorphisme, propriétés

➜ Déterminant d'une matrice carrée, propriétés. Cas de la taille 2×2 et 3×3 (règle de Sarrus).

★ Déterminant d'une matrice triangulaire.

★ Mineur, cofacteur, développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne. Exemples

★ Déterminant de Vandermonde.

➜ Comatrice, formule de Laplace, $M\mathrm{Com}(M)^{\mathrm{T}} = \det(M) I_n$ et formule d'inversion.

➜ Aire orientée, volume orienté, propriétés sur les droites, les plans, 3 points alignés du plan, 4 points coplanaires de l'espace.

★ Calculer l'un des déterminants suivants :

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}_{[n]} \qquad a_n = \det\left((|i-j|)_{1 \leq i,j \leq n}\right) \qquad \Gamma = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \end{vmatrix}$$