Colle 28

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Extrait du programme

1. Probabilités

1. Probabilités sur un univers fini

f. Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $\mathbf{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)=\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1+\dots+X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

2. Espérance et variance

a. Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Formule de transfert : $\mathbf{E}(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X=x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes : $\mathbf{E}(XY)=\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.

b. Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathbf{Cov}(X,Y)=\mathbf{E}(XY)-\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d'une variable binomiale.

c. Inégalités probabilistes

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.

Méthodes et savoir-faire

- Déterminer une loi conjointe, en déduire les lois marginales et reconnaître l'indépendance éventuelle des variables.
- Calculer une covariance, calculer la variance d'une somme de variables (indépendantes ou non)

Questions de cours pratiques

➜ Couple de vad finies, loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle, indépendance.
Donner les caractéristiques associées concernant la table de la loi conjointe.

★ Espérance de $g(X, Y)$ (théorème de transfert). Covariance de variables discrètes finies.
Énoncé et prouver les propriétés liées de la covariance.

★ Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. Exhiber un contre-exemple montrant que la réciproque est fausse. Conséquence sur la covariance et le variance d'une somme.

➜ Indépendance d'une suite finies de vad finies. Variance d'une somme (dont le cas d'indépendance 2 à 2).
Stabilité de la loi binomiale

★ Loi faible des grands nombres.

★ Soit X et Y deux variables indépendantes de loi $\mathcal{U}([\![1;n]\!])$.
Donner la loi conjointe du couple puis celle de $Z = X + Y$.

★ Estimation de l'espérance par intervalle de confiance :
Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite vad finies, indépendantes de même loi, d'espérance m, de variance σ^2.
On note $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.

L'intervalle de confiance $I =]\overline{X_n} - b, \overline{X_n} + b[$ est dit de niveau de confiance 95% ou de niveau de risque 5% si $\mathbf{P}(m \in I) \geq 0.95$. Cela donne une estimation du paramètre m de la loi à partir de simulations. Pour le même nombre de simulations, on peut réduire l'intervalle de confiance, mais cela diminue le niveau de confiance (ou augment le niveau de risque).

Montrer qu'un intervalle de confiance de niveau de risque $\alpha \in]0, 1[$ est

$$\left]\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha n}}; \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha n}}\right[$$

★ Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0, 1[$.
Soient $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

(a) Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (S, D).

(b) Calculer $\mathbf{Cov}(S, D)$ et déterminer si S et D sont indépendantes.