Colle 24

Les questions "★ " sont avec une démonstration ou une démarche à mettre en place.

Extrait du programme

1. Procédés sommatoires discrets

a. Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique.
Convergence, divergence, somme.

La série est notée $\sum u_n$.

En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Divergence grossière.

Reste d'une série convergente.

Lien suite-série.

La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.

Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

b. Séries à termes positifs ou nuls

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $0 \le u_n \le v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.

Application à l'étude de sommes partielles.

Séries de Riemann.

c. Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

d. Théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

e. Familles sommables de nombres réels positifs

Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0,+\infty]$.
Borne supérieure dans $[0,+\infty]$.

Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I.

La somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$.

Cas où I est fini, où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge.
Invariance de la somme par permutation.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.

Opérations : somme, multiplication par un réel positif.

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\displaystyle\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} u_i\Big) = \sum_{i\in I} u_i$.
Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.

La démonstration est hors programme.

f. Familles sommables de nombres complexes

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\displaystyle\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$.

Notation $\ell^1(I)$.
Pour $I \in \mathbb{N}$, lien avec les séries.
Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.

Somme d'une famille sommable de nombres complexes.

Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une partie finie F de I telle que $\displaystyle\Big|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i\Big| \leq \varepsilon$.
Invariance de la somme par permutation.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.
Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\displaystyle\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} u_i\Big) = \sum_{i\in I} u_i$.
Cas où I est un produit : théorème de Fubini.

La démonstration est hors programme.

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_{i'})_{i'\in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et

$$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}$$

Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Méthodes et savoir-faire

- Déterminer la nature d'une série par comparaison avec une série de Riemann et plus généralement mettre en place une comparaison de séries à termes positifs
- Identifier et calcul de la somme des séries géométriques, exponentielles, téléscopiques
- Pour une série, si rien n'est évident alors revenir à la définition : considérer les sommes partielles !
- Comparaison série-intégrale (fonction monotone)
- Mettre en place le critère spécial des séries alternées
- Sommabilité d'une famille à termes positifs :
  - travail sur les sommes à support fini
  - comparaison à une autre famille sommable
- Mettre en place une sommation par paquets : identifier les différentes partitions (changement d'indice, Fubini, familles produits, produit de Cauchy).

Questions de cours

➜ Série, somme partielle, convergence, somme, reste, absolue convergence et le lien entre les deux types de convergence.

★ Condition nécessaire de convergence.

Exhiber un contre-exemple de la réciproque est fausse en montrant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

➜ CNS de convergence des séries à termes positifs.
Théorème de comparaison des séries à termes positifs : cas $u_n \leq v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.
En particulier, donner les critères pour une comparaison avec une série de Riemann.

➜ Séries usuelles : série téléscopique, série géométrique, série exponentielle, série de Riemann.

Expliquer comment déterminer la nature et la somme de la série $\sum \dfrac{(n^2-1)2^n}{n!}$.

★ La convergence absolue implique la convergence.

★ Définition d'une série alternée. Énoncé du critère spécial des séries alternées.

(i) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.

(ii) Justifier que la comparaison $u_n \sim v_n$ n'est pertinente que pour des séries à termes positifs.

★ Série exponentielle. Démontrer le résultat dans le cas réel.

★ Comparaison série-intégrale : établir un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f lorsque f est positive et monotone (choisir le cas croissant ou décroissant).

En déduire des relations de comparaison et donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

➜ Somme d'une famille à termes positifs. Famille à termes positifs sommable.
Propriétés de restriction, de linéarité, de croissance. Propriété sur la sommation par paquets est ses corollaires : changement d'indice, Fubini, familles produits, produit de Cauchy.
Sommabilité d'un famille complexe, notation $\ell^1(I)$, sens de la notation somme. Lien en l'absolument convergence et la commutative convergence pour une série.

★ Sommabilité des familles $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1,3]}$ et $\left(\dfrac{1}{5^{j+k}}\right)_{(j,k) \in \mathbb{N}^2}$.

★ Soit $x \in]-1,1[$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

★ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la famille $\left(\dfrac{|z|^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

On définit la fonction suivante $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Alors f est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

En particulier, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\qquad f(z+z') = f(z)f(z')$.

★ Considérant f définie ci-avant :

(i) $f_{|\mathbb{R}}$ est dérivable en 0 et $f'_{|\mathbb{R}}(0) = 1$

(ii) $f_{|\mathbb{R}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_{|\mathbb{R}}(x) = f_{|\mathbb{R}}(x)$