

DS 8

Mercredi 30 avril 2025 – durée : 4 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Convergence d'une série

On se propose d'étudier la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$.

- Soient $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$.
- a) Exprimer pour tout réel t , $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.
b) En déduire que :

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}$.

- Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 2 - Suite d'intégrales

Partie A - Étude d'une fonction f

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

4. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$,

$$1 - x + \frac{x^2}{2} \geq \exp(-x) \geq 1 - x + \frac{x^2}{2} - x^3$$

5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
6. Étudier les variations de φ .

En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie B - Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t} dt$$

7. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

8. Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.
9. Utiliser un changement de variable affine pour montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+t} dt - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$$

10. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 - Série télescopique

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$$

1. a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
 b) Donner un équivalent de $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
 c) En déduire la nature de la série $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et déterminer que $\ell = 0$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$

Montrer à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ de $\ln(v_n)$ que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge si et seulement si $\alpha = \frac{3}{2}$.

3. a) Considérant la suite des sommes partielles de $\sum \ln v_n$, montrer qu'il existe un réel S tel que

$$u_n \sim u_1 \frac{e^S}{n^{\frac{3}{2}}}$$

- b) En déduire que la série de terme général u_n converge.

4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $2 \sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2 \sum_{k=0}^n k u_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k$

5. En déduire la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Exercice 4

Les questions 2, 3, 4a et 4b sont indépendantes

On effectue $2n$ tirages **avec** remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Soit Ω l'ensemble des tirages possibles. Déterminer $\text{Card}(\Omega)$. Pour la suite, on considèrera tous les tirages comme équiprobables.
2. a) Quelle est la probabilité d'obtenir $2n$ fois la même boule ?
 b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 boules distinctes au cours de ces $2n$ tirages ?
 c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 boules distinctes au cours de ces $2n$ tirages ?
3. Soit A_k l'événement «les k premières boules obtenues sont toutes 2 à 2 distinctes» .
 a) Déterminer $\mathbf{P}(A_k)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 b) Que dire de A_{n+1} ?
4. Soit B_k l'événement «au $k^{\text{ième}}$ tirage on obtient pour la première fois une boule déjà sortie précédemment» où $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$.
 a) Déterminer $\mathbf{P}(B_k)$.
 b) Exprimer A_{k-1} en fonction de A_k et B_k . En déduire une nouvelle expression de $\mathbf{P}(B_k)$.
 c) Montrer que les expressions obtenues pour $\mathbf{P}(B_k)$ sont égales.

Exercice 5 - Intégrale de Gauss

Pour tout réel x , on définit :

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Soit $A > 0$, montrer qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall u \in [-A, A], |e^u - 1 - u| \leq Mu^2$$

2. a) Soit x un réel fixé, montrer que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt \right) = 0.$$

- b) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt.$$

3. a) Calculer $\varphi(0)$.

- b) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \varphi(x) \leq e^{-x} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$. En déduire que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

4. Pour tout réel x , on définit

$$f(x) = \varphi(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$$

- a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- b) Montrer à l'aide du changement de variable $t = xu$ que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x e^{-t^2} dt = x \int_0^1 e^{-x^2 u^2} du.$$

- c) En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$. Quelle est la valeur de cette constante ?

5. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

