

Proposition de corrigé du devoir surveillé 8

Exercice 1 - Convergence d'une série

1. Soit $\lambda > 0$. Les fonctions f et $t \mapsto \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Effectuons une intégration par parties :

$$\text{On pose } \begin{cases} u(t) = f(t) \\ v'(t) = \cos(\lambda t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = f'(t) \\ v(t) = \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \left| \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt \right| &= \left| \left[f(t) \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} dt \right| \\ &\quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \left| f(b) \frac{\sin(\lambda b)}{\lambda} \right| + \left| f(a) \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda} \right| + \left| \int_a^b f'(t) \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} dt \right| \\ &\quad \text{or } |\sin| \leq 1 \text{ et par croissance de l'intégrale} \\ &\leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{\lambda} + \int_a^b \frac{|f'(t)|}{\lambda} dt \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right) \\ \text{Or } \frac{1}{\lambda} \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right) &\xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0. \text{ Ainsi, par encadrement } \boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0.} \end{aligned}$$

2. a) Il s'agit de linéariser l'expression.

$\Rightarrow$ On peut utiliser la formule d'Euler ou directement les formules de trigonométrie

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \cos(kt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) \right]}.$$

b) Soit $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2} \left[\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{(-1)^k}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{2} \cos\left(\frac{2(k-1)+1}{2}t\right) \right] \\ &\quad \text{par somme télescopique} \\ &= \frac{(-1)^n}{2} \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{(-1)^0}{2} \cos\left(\frac{2(1-1)+1}{2}t\right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)}.$$

c) Pour tout réel $t \in [0, 1]$, on a $\frac{t}{2} \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \subset \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Intégrons cette égalité de fonctions sur $[0, 1]$ et utilisons la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) dt &= \int_0^1 (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} dt \\ \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^1 \cos(kt) dt &= (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2} \\ \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^1 &= (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}}.$

3. D'après la première question, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ (dénominateur non nul) et comme $\lambda = \frac{2n+1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que :

$$\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^n u_k \rightarrow 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}}.$

Exercice 2 - Suite d'intégrales

Partie A - Étude d'une fonction f

1. $x \mapsto -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_-^*$.

$\exp$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_-^*$.

Ainsi, par composition d'applications, $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par somme d'applications de classe $\mathcal{C}^1$, $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin, $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas ; par quotient d'applications $\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)}$.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Il reste à étudier la continuité de f en 0. Soit $x \in]0; 1]$:

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} = -\frac{e^{-x} - 1}{-x}$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ (limite usuelle) et $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$; par composition de limite, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. De plus, $f(0) = 1$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}x - (1 - e^{-x})}{x^2} = \frac{e^{-x}(1 + x) - 1}{x^2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = e^{-x}(1 + x) - 1}$

4. Posons $g : x \mapsto 1 - x + \frac{x^2}{2} - \exp(-x)$ et $h : \exp(-x) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - x^3\right)$.

Les applications sont de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$. Pour $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 + x + \exp(-x) & h'(x) &= -\exp(-x) + 1 - x + 3x^2 \\ g''(x) &= 1 - \exp(-x) & h''(x) &= \exp(-x) - 1 + 6x \\ g'''(x) &= \exp(-x) & h'''(x) &= -\exp(-x) + 6 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

x	0	1	x	0	1
$g'''(x)$		+	$h'''(x)$		+
$g''(x)$		$\nearrow$	$h''(x)$		$\nearrow$
	0			0	
$g'(x)$		+	$h'(x)$		+
$g(x)$		$\nearrow$	$h(x)$		$\nearrow$
	0			0	
$g(x)$		+	$h(x)$		+
	0			0	
$g(x)$		+	$h(x)$		+
	0			0	

Ainsi, $\boxed{\forall x \in [0; 1], \quad 1 - x + \frac{x^2}{2} \geq \exp(-x) \geq 1 - x + \frac{x^2}{2} - x^3}$

5. Comme $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$, cherchons à mettre en place le théorème de prolongement des applications de classe $\mathcal{C}^1$ c'est à dire, déterminer l'existence d'une limite de f' en 0.

D'après 2), pour $x \in]0; 1]$:

$$\begin{aligned}
 1 - x + \frac{x^2}{2} &\geq \exp(-x) \geq 1 - x + \frac{x^2}{2} - x^3 \\
 \Rightarrow \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)(1+x) &\geq \exp(-x)(1+x) \geq \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - x^3\right)(1+x) \\
 \Rightarrow \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)(1+x) - 1 &\geq \varphi(x) \geq \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - x^3\right)(1+x) - 1 \\
 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} &\geq \varphi(x) \geq -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - x^4 \\
 \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{x}{2}}_{\xrightarrow{x \neq 0} -\frac{1}{2}} &\geq f'(x) \geq \underbrace{-\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - x^2}_{\xrightarrow{x \neq 0} -\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Par encadrement, on obtient $f'(x) \xrightarrow{x \neq 0} -\frac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

6. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\varphi'(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} = -xe^{-x}$$

Le signe de φ se détermine sans calcul. Le tableau de variation de φ et de f est :

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	—
$\varphi(x)$	0	
		$\searrow$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	—
	1	
$f(x)$		$\searrow$
		0

La limite de f en $+\infty$ n'est pas une forme indéterminée, par opérations algébriques sur des limites connues, on a $\boxed{\lim_{+\infty} f = 0}$.

Partie B - Étude d'une suite

$$\begin{aligned}
 7. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ On note que } 0 \leq t \leq n &\Rightarrow -\frac{t}{n} \geq -1 \\
 &\Rightarrow e^{-\frac{t}{n}} \geq \frac{1}{e} \\
 &\Rightarrow \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t} \geq \frac{1}{e} \frac{1}{1+t}
 \end{aligned}$$

Les applications comparées sont continues sur le segment $[0, n]$.

La croissance de l'intégrale donne :

$$u_n \geq \int_0^n \frac{1}{e} \frac{1}{1+t} dt = \frac{1}{e} [\ln(1+t)]_0^n = \frac{1}{e} (\ln(n+1) - \ln(1))$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)}.$$

Or $\ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, par comparaison on obtient $\boxed{(u_n) \text{ tend vers } +\infty}$.

8. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après 3) donc il s'agit de l'intégrale d'une application continue sur le segment $[0, 1]$, $\int_0^1 f(x) dx$ est bien définie.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note que $\int_0^n \frac{1}{1+t} dt - u_n = \int_0^n \frac{1}{1+t} dt - \int_0^n \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t} dt = \int_0^n \frac{1 - e^{-\frac{t}{n}}}{1+t} dt$

• Comme l'application $u \mapsto \frac{1 - e^{-\frac{t}{n}}}{1+t}$ est positive sur $[0, n]$, par positivité de l'intégrale, nous obtenons l'inégalité de gauche.

• Le changement de variable qui semble naturel est de poser $x = \frac{t}{n}$:

nx	t
ndx	dt
$x = 0$	$t = 0$
$x = 1$	$t = n$

On a $\frac{1 - e^{-\frac{t}{n}}}{1+t} dt = \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} ndx$ ce qui donne :

$$\int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n = \int_0^1 n \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} dx$$

Or note pour tout $x \in]0, 1]$,

$$1 + nx \geq nx \Rightarrow \frac{n}{1+nx} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow n \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} \leq \frac{1 - e^{-x}}{x} = f(x) \text{ car } 1 - e^{-x} \geq 0$$

La croissance de l'intégrale donne

$$\int_0^1 n \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} dx \leq \int_0^1 f(x) dx$$

Ainsi, $0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$.

10. Un calcul rapide donne : $0 \leq \ln(n+1) - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$

$\int_0^1 f(x) dx$ étant une constante alors $\frac{1}{\ln(n+1)} \int_0^1 f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Divisant l'inégalité par $\ln(1+n)$, on obtient par encadrement $1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ou encore

$\frac{u_n}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ c'est-à-dire $u_n \sim \ln(n+1)$.

Rappelons que $\ln(n+1) \sim \ln(n)$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 + 0 = 1$$

Ainsi, $u_n \sim \ln(n)$.

Exercice 3 - Série télescopique

1. a) Par une récurrence aisée, on montre que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

De plus, pour tout $n \geq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+5} < 1$.

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.

Le théorème de limite monotone donne que la suite converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$.

b) Soit $n \geq 0$,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \frac{2n+2}{2n+5} = \ln \left(1 - \frac{3}{2n+5} \right) = -\frac{3}{2n+5} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \sim -\frac{3}{2n}$.

c) D'une part la série $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est à termes négatifs (donc de signe fixe) à partir d'un certain rang, donc elle converge si et seulement si elle converge absolument ; et d'autre part son terme général est équivalent au terme général d'une série de type Riemann divergente (avec $1 \leq 1$). Ainsi la série diverge et ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. Déterminons ℓ en utilisant une série télescopique.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n) - \ln(u_0) = \ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

Par composition des limites avec la fonction exp on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. Effectuons un développement asymptotique de $\ln(v_n)$ en $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ainsi la quantité négligée forme une série convergente par le critère de Riemann ($2 \geq 1$) et donc ne change pas la nature de $\sum \ln(v_n)$.

$$\begin{aligned} \ln(v_n) &= \ln \left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \frac{2n+2}{2n+5} \right) = \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{2n}} \right) \\ &= (\alpha + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{5}{2n} \right) \\ &\stackrel{+}{=} (\alpha + 1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) - \left(\frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\stackrel{+}{=} \frac{2\alpha - 3}{2n} + \frac{21 - 4\alpha}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Si $2\alpha - 3 \neq 0$ alors $\ln(v_n) \sim \frac{2\alpha - 3}{2n}$ qui est du signe de fixe à partir d'un certain rang. Comme $\sum \frac{2\alpha - 3}{2n}$ diverge par le critère de Riemann ; alors, par comparaison, la série $\sum \ln(v_n)$ diverge.

Si $2\alpha - 3 = 0$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{3}{2}$ alors $\ln(v_n) \sim \frac{15}{8n^2}$ et donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($2 \geq 1$), la série $\sum \ln(v_n)$ converge.

Ainsi, la série $\sum \ln(v_n)$ converge si et seulement si $\alpha = \frac{3}{2}$.

3. a) D'après la question précédente, nous pouvons considérer la suite (v_n) avec $\alpha = \frac{3}{2}$. Pour tout $p \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p-1} \ln(v_n) &= \sum_{n=1}^{p-1} \left(\ln \left((n+1)^{\frac{3}{2}} \right) - \ln \left(n^{\frac{3}{2}} \right) \right) + \sum_{n=1}^{p-1} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) \\ &= \ln(p^{\frac{3}{2}}) - \ln(1) + \ln(u_p) - \ln(u_1) = \frac{3}{2} \ln(p) + \ln(u_p) - \ln(u_1) \\ \text{donc } \ln(u_p) &= \sum_{n=1}^{p-1} \ln(v_n) + \ln(u_1) - \frac{3}{2} \ln(p)\end{aligned}$$

Donc $u_p = \exp \left(\sum_{n=1}^{p-1} \ln(v_n) + \ln(u_1) - \frac{3}{2} \ln(p) \right)$.

En notant S la somme de $\sum \ln(v_n)$ qui converge d'après la question 2, on obtient :

$$u_p \sim u_1 \frac{e^S}{p^{\frac{3}{2}}}$$

b) Par comparaison de séries à termes positifs, avec la série $\sum \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}$ convergente d'après le critère de Riemann ($\frac{3}{2} > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

4. Revenant à la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(2k+5)u_{k+1} = (2k+2)u_k \quad \Leftrightarrow \quad 2(k+1)u_{k+1} + 3u_{k+1} = 2ku_k + 2u_k$$

Il suffit de sommer ces égalités pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$2 \sum_{k=0}^n (k+1)u_{k+1} + 3 \sum_{k=0}^n u_{k+1} = 2 \sum_{k=0}^n ku_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k$$

Effectuons un changement d'indice $j = k+1$ dans les deux sommes du membre de gauche de l'égalité :

$$\boxed{2 \sum_{j=1}^{n+1} ju_j + 3 \sum_{j=1}^{n+1} u_j = 2 \sum_{k=0}^n ku_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k}$$

5. En simplifiant les termes qui apparaissent à la fois à gauche et à droite de l'égalité précédente, nous obtenons :

$$2(n+1)u_{n+1} + 3u_{n+1} + \sum_{k=1}^n u_k = 2u_0$$

Or d'après la question 3, il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}}$ donc $\lim u_n = \lim nu_n = 0$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 2u_0 = 2$ et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 3$.

Exercice 4

1. Comme les tirages sont faits avec remise, il y a de l'ordre et de la répétition : un résultat est une $2n$ -liste sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Donc $\text{Card}(\Omega) = n^{2n}$. Tous les résultats sont équiprobables.

2. a) Il y a n numéros donc n résultats où les $2n$ numéros sont identiques.

Ainsi, la probabilité d'obtenir $2n$ fois la même boule est $\frac{n}{n^{2n}} = \frac{1}{n^{2n-1}}$.

b) Le nombre de façons de choisir deux numéros distincts : $\binom{n}{2}$.

Le nombre de façons de les répartir parmi les $2n$ tirages est $\text{Card}(\mathcal{P}(\llbracket 1, 2n \rrbracket)) - 2 = 2^{2n} - 2$: nombre de sous ensembles de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ diminué des deux où un seul des numéros n'est présent.

Autre approche : on discute suivant le nombre d'occurrences d'un des numéros : $k \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket$.

Pour chaque valeur de k , il y a $\binom{2n}{k}$ façons de choisir k places parmi les $2n$.

Ainsi, le nombre de façons de les répartir parmi les $2n$ tirages est

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} - \underbrace{1}_{k=0} - \underbrace{1}_{k=2n}$$

La formule du binôme donne :

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} - 2$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir exactement 2 boules distinctes est

$$\frac{\binom{n}{2}(2^{2n} - 2)}{n^{2n}} = \frac{(n-1)(2^{2n-1} - 1)}{n^{2n-1}}$$

c) Décomposons la situation :

- nombre de façons de choisir trois boules distinctes : $\binom{n}{3}$
- discutons suivant le nombre d'occurrences du premier numéro : $k \in \llbracket 1, 2n-2 \rrbracket$
- nombres de façons de placer cette boule : $\binom{2n}{k}$.
- nombres de façons de placer les deux autres boules parmi les $2n-k$ tirages restants : $2^{2n-k} - 2$ (comme au 2b)

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} \sum_{k=1}^{2n-2} \binom{2n}{k} (2^{2n-k} - 2) &= \binom{n}{3} \left(\sum_{k=1}^{2n-2} \binom{2n}{k} 2^{2n-k} - 2 \sum_{k=1}^{2n-2} \binom{2n}{k} \right) \\ &= \binom{n}{3} \left[3^{2n} - \underbrace{2^{2n}}_{k=0} - \underbrace{\binom{2n}{2n-1} 2}_{k=2n-1} - \underbrace{1}_{k=2n} \right] - 2 \left[2^{2n} + 2(1 + 2n + 1) \right] \\ &= \binom{n}{3} (3^{2n} - 3 \times 2^{2n} + 3) \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir exactement 3 boules distinctes est

$$\frac{\binom{n}{3} (3^{2n} - 3 \times 2^{2n} + 3)}{n^{2n}}$$

Autre approche utilisant la formule du crible :

- nombre de façons de choisir trois boules distinctes : $\binom{n}{3}$.

Considérons maintenant les résultats composés des trois numéros sélectionnés.

- Notons C_i les résultats où la boule i apparaît pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

On cherche $\text{Card}(C_1 \cap C_2 \cap C_3)$.

D'après de Morgan : $\text{Card}(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 3^{2n} - \text{Card}(\overline{C_1} \cup \overline{C_2} \cup \overline{C_3})$

Or $\text{Card}(\overline{C_i}) = 2^{2n}$, $\text{Card}(\overline{C_i} \cap \overline{C_j}) = 1^{2n} = 1$ et $\text{Card}(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3}) = 0$.

La formule du crible donne :

$$\text{Card}(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 3^{2n} - 3 \times 2^{2n} + 3 \times 1 - 0$$

Ainsi, on retrouve la probabilité d'obtenir exactement 3 boules distinctes est

$$\boxed{\frac{\binom{n}{3} (3^{2n} - 3 \times 2^{2n} + 3)}{n^{2n}}}$$

3. a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Nombre de façons de choisir les k premières boules : ce sont des arrangements de k boules parmi $\llbracket 1, n \rrbracket$: A_n^k .

- On complète le résultat par une $(2n - k)$ -liste sur $\llbracket 1, n \rrbracket$: n^{2n-k}

Ainsi, $\text{Card}(A_k) = A_n^k n^{2n-k}$ et $\mathbf{P}(A_k) = \frac{A_n^k n^{2n-k}}{n^{2n}} = \frac{A_n^k}{n^k}$.

Ainsi, $\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(A_k) = \frac{A_n^k}{n^k}}$.

b) Comme il n'y a que n boules distinctes, alors $A_{n+1} = \emptyset$ et $\boxed{\mathbf{P}(A_{n+1}) = 0}$.

4. a) Soit $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$.

- Nombre de façons de choisir les $k - 1$ premières boules : ce sont des arrangements de $k - 1$ boules parmi $\llbracket 1, n \rrbracket$: A_n^{k-1} .

- Nombre de façons de choisir la k -ème boule parmi les $k - 1$ déjà obtenues : $\binom{k-1}{1}$.

- On complète le résultat par une $(2n - k)$ -liste sur $\llbracket 1, n \rrbracket$: n^{2n-k}

Ainsi, $\text{Card}(B_k) = A_n^{k-1} (k - 1) n^{2n-k}$ et $\mathbf{P}(B_k) = (k - 1) \frac{A_n^{k-1}}{n^k}$.

Ainsi, $\boxed{\forall k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket, \mathbf{P}(B_k) = (k - 1) \frac{A_n^{k-1}}{n^k}}$.

b) Soit $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$, on a

$$\boxed{A_{k-1} = A_k \cup B_k}$$

Montrons cette égalité par double inclusion :

- $\supseteq$ D'après la définition, $A_k \subset A_{k-1}$ et $B_k \subset A_{k-1}$ donc $A_k \cup B_k \subset A_{k-1}$.
- $\subseteq$ Un résultat de A_{k-1} possède ses $k - 1$ premières boules deux à deux distinctes.

Considérons la k -ème, il y a deux cas :

Soit elle diffère des $k - 1$ premières, alors le résultat est dans A_k .

Soit elle a déjà été tirée parmi les $k - 1$ premières, alors le résultat est dans B_k .

Ainsi, $A_{k-1} \subset A_k \cup B_k$.

Or A_k et B_k sont incompatibles, donc $\mathbf{P}(A_{k-1}) = \mathbf{P}(A_k) + \mathbf{P}(B_k)$.

Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(B_k) = \mathbf{P}(A_{k-1}) - \mathbf{P}(A_k) = \frac{A_n^{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{A_n^k}{n^k}}.$

c) Soit $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \frac{A_n^{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{A_n^k}{n^k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!n^{k-1}} - \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n!}{(n-k+1)!n^k} (n - (n-k+1)) \\ &= (k-1) \frac{n!}{(n-k+1)!n^k} \end{aligned}$$

D'un autre côté : $(k-1) \frac{A_n^{k-1}}{n^k} = (k-1) \frac{n!}{(n-k+1)!n^k}$

Ainsi, les expressions obtenues en 4a) et 4b) sont égales.

Exercice 5 - Intégrale de Gauss

1. Soit $A > 0$, comme $\exp \in \mathcal{C}^2([-A, A])$ la formule de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre 0 et $u \in [-A, A]$ donne,

$$|e^u - e^1 - (u - 0) \exp'(0)| \leq \frac{|u - 0|^2}{2} \sup(|\exp''(t)|, t \text{ entre } 0 \text{ et } u) \leq \frac{u^2}{2} \exp(A)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour } M = \frac{e^A}{2}, \forall u \in [-A, A], |e^u - 1 - u| \leq Mu^2.}$

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale, puis par croissance de l'intégrale d'après 1), il vient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_0^1 \frac{e^{-(x+h)(1+t^2)} - e^{-x(1+t^2)} + (1+t^2)he^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} (e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} M h^2 (1+t^2)^2 dt \\ &\leq |h| \underbrace{\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} M (1+t^2) dt}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

Ainsi, par encadrement, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt \right) = 0.}$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ admet une limite finie, $-\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$ en 0, d'après ci-avant.

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt.}$

3. a) $\boxed{\varphi(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+t^2 \Rightarrow -x \geq -x(1+t^2) \Rightarrow 0 \leq e^{-x(1+t^2)} \leq e^{-x} \Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-x}}{1+t^2}$$

La croissance de l'intégrale, puis la linéarité donne :

$$0 \leq \varphi(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2} dt = e^{-x} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = e^{-x} \varphi(0)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \varphi(x) \leq e^{-x} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}.}$

Or $e^{-x} \varphi(0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc par encadrement, il vient $\boxed{\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.}$

4. a) $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive nulle en 0 de $x \mapsto e^{-x^2}$ et donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par produit, $x \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$.

Par composition, $x \mapsto \varphi(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Enfin, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Effectuons le changement de variable demandé :

$$\begin{cases} t = xu \\ dt = xdu \\ t = 0 \leftrightarrow u = 0 \\ t = x \leftrightarrow u = 1 \end{cases} \quad \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-x^2 u^2} x du$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x e^{-t^2} dt = x \int_0^1 e^{-x^2 u^2} du.$

c) Comme f est dérivable, dérivons la. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\psi'(x^2) + 2 \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)' \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt + 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 u^2} du = 0 \end{aligned}$$

Par caractérisation des applications constantes, f est constante sur $\mathbb{R}$.

En particulier $f(0) = \varphi(0) = \frac{\pi}{4}.$

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a d'après 4b), puis 3b) :

$$\left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = f(x) - \varphi(x^2) = \frac{\pi}{4} - \varphi(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$