Corrigé du DM 21

1. $\mathcal{E} = \{aA + bB + cC;\ a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(A, B, C)$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ engendré par la famille (A, B, C).
De plus, la famille (A, B, C) est échelonnée dans la base canonique. Ainsi $\boxed{\mathcal{B} = (A, B, C) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$

2. Soit $M = aA + bB + cC, N = a'A + b'B + c'C \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} MN &= (aA + bB + cC)(a'A + b'B + c'C) \\ &= aa'A^2 + ab'AB + ac'AC + ba'BA + bb'B^2 + bc'BC + ca'CA + cb'CB + cc'C^2 \\ &= aa'A + ab'B + 0 + 0 + 0 + bc'B + 0 + 0 + cc'C \in \mathrm{Vect}(A, B, C) = \mathcal{E} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{E} \text{ est stable par multiplication}}$.

3. Soit $M = aA + bB + cC \in \mathcal{E}$ inversible. Comme M est triangulaire alors $a \neq 0$ et $c \neq 0$. On cherche $M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tel que

$$MM^{-1} = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cz & ct \end{pmatrix} = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cz = 0 \\ ct = 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{a} \\ y = -\frac{b}{ac} \\ z = 0 \\ t = \frac{1}{c} \end{array} \right.$$

Donc $M^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$. *(Cette formule est au programme ... on peut la poser directement.)*
Ainsi, $\boxed{\text{pour toute matrice } M \text{ de } \mathcal{E}, \text{ si } M \text{ est inversible alors } M^{-1} \in \mathcal{E}.}$

4. Comme $\mathcal{E}$ est stable par multiplication et que $T \in \mathcal{E}$, alors pour $M \in \mathcal{E}$ il vient $TM \in \mathcal{E}$ et $f(M) = TMT \in \mathcal{E}$.
Soit $M, N \in \mathcal{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$f(\alpha M + \beta N) = T(\alpha M + \beta N)T = \alpha TMT + \beta TMT = \alpha f(M) + \beta f(M)$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$

5. T est triangulaire avec des coefficients diagonaux tous non nuls donc $\boxed{T \text{ est inversible}}$. De plus $T^{-1} \in \mathcal{E}$ d'après 3).
Posons $g : M \mapsto T^{-1}MT^{-1}$. Alors pour $M \in \mathcal{E}$,

$$g \circ f(M) = g\big(TMT\big) = T^{-1}TMTT^{-1} = I_2MI_2 = M \text{ et } f \circ g(M) = f\big(T^{-1}MT^{-1}\big) = TT^{-1}MT^{-1}T = I_2MI_2 = M$$

Donc $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.
Ainsi, par caractérisation, $\boxed{f \text{ est bijective et donc un automorphisme de } \mathcal{E}.}$

6. $f(A) = TAT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A + B = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$

$f(B) = TBT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B = (0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$

$f(C) = TCT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B + C = (0, 1, 1)_{\mathcal{B}}$

Ainsi, $\boxed{F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

7. $H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc pour tout $k \geq 2$, $H^k = H^{k-2}H^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
Comme I et H commutent, la formule du binôme donne pour $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$(I + aH)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}(aH)^k = \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} aH + 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = I + naH$$

La relation reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } a \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N},\ (I + aH)^n = I + naH.}$

8. $F = I + H$, donc d'après 7), $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F^n = I + nH.}$

9. Posons $\boxed{G = I + \frac{1}{3}H}$, alors $G^3 = I + \frac{3}{3}H = I + H = F$.
On pose $g \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ tel que $G = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$. Par produit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = F = G^3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g^3)$.
Le théorème d'isomorphisme entre $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour la base $\mathcal{B}$ donne que $g^3 = f$.