

DM 21

à rendre le mardi 13 mai 2025

On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.
2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
6. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F .

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Calculer H^2 , puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.
8. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n .
9. Trouver une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $I + aH$ tel que telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?