

Corrigé du DM 22

Partie A

On remarque que $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$; en effet, les deux cas extrêmes sont : la boule 1 est tirée en premier ce qui donne $X_n = 1$ ou les boules peuvent être tirées par ordre décroissant de leur numéro ce qui donne $X_n = n$.

On remarque aussi que la boule numérotée 1 est toujours la dernière à être retirée.

On note B_i^j l'évènement : "La boule portant le numéro i est tirée au j -ème tirage.

1. Lois et espérances de X_1 et X_2 . Pour X_1 , l'urne contient une seule boule, donc $X_1(\Omega) = \{1\}$.

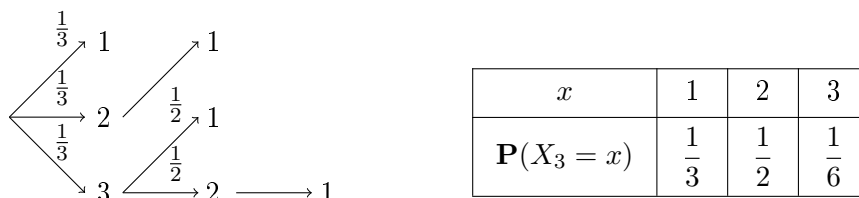
x	1
$\mathbf{P}(X_1 = x)$	1

 $\mathbf{E}(X_1) = 1$ et

x	1	2
$\mathbf{P}(X_2 = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

 $\mathbf{E}(X_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

2. Loi et espérance de X_3 .



Justification du tableau : par exemple, calculons $\mathbf{P}(X_3 = 3) = \mathbf{P}(B_3^1 \cap B_2^2 \cap B_1^3)$.

La formule des probabilités composées, où l'hypothèse $\mathbf{P}(B_3^1 \cap B_2^2) > 0$ se vérifie par construction de la formule, donne :

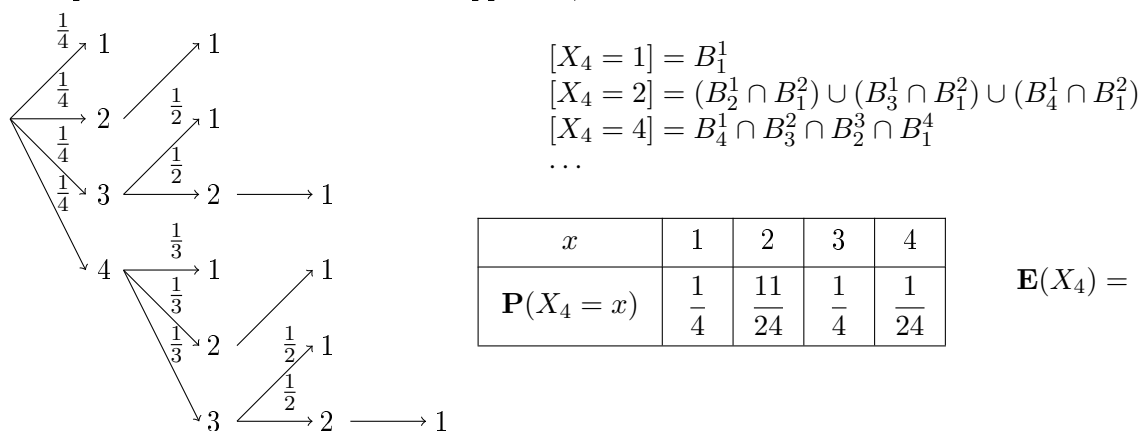
$$\mathbf{P}(X_3 = 3) = \mathbf{P}(B_3^1) \mathbf{P}_{B_3^1}(B_2^2) \mathbf{P}_{B_3^1 \cap B_2^2}(B_1^3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$

De même, on trouve $\mathbf{P}(X_3 = 1) = \mathbf{P}(B_1^1) = \frac{1}{3}$ et

$$\mathbf{P}(X_3 = 2) = \mathbf{P}((B_3^1 \cap B_1^2) \cup (B_2^1 \cap B_1^2)) = \mathbf{P}(B_3^1 \cap B_1^2) + \mathbf{P}(B_2^1 \cap B_1^2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

• $\mathbf{E}(X_3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$.

3. Loi et espérance de X_4 . Avec la même approche, on trouve :



Partie B

Retour au cas général.

4. Calcul de $\mathbf{P}[X_n = 1]$ et $\mathbf{P}[X_n = n]$:

- $\mathbf{P}[X_n = 1] = \mathbf{P}(B_1^1) = \frac{1}{n}$

- $\mathbf{P}[X_n = n] = \mathbf{P}(B_n^1 \cap B_{n-1}^2 \cap \dots \cap B_1^n)$.

La formule des probabilités composées, où l'hypothèse $\mathbf{P}(B_n^1 \cap B_{n-1}^2 \cap \dots \cap B_2^{n-1})$ se vérifie par construction de la formule, donne :

$$\mathbf{P}[X_n = n] = \mathbf{P}(B_n^1) \mathbf{P}_{B_n^1}(B_{n-1}^2) \dots \mathbf{P}_{B_n^1 \cap B_{n-1}^2 \cap \dots \cap B_2^{n-1}}(B_1^n) = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}$$

Ainsi $\boxed{\mathbf{P}[X_n = 1] = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbf{P}[X_n = n] = \frac{1}{n!}}$.

5. a) Dans l'urne, chaque boule a la même probabilité d'être tirée, la variable aléatoire N_1 ressortant le numéro de la boule, suit une loi uniforme sur l'ensemble des numéros possibles : $\boxed{N_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)}$.

b) Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

L'évènement $[N_1 = i]$ traduit que le deuxième tirage (et les suivants) sont fait parmi les boules de numéro $\llbracket 1, i-1 \rrbracket$. La probabilité que l'urne soit vidée en k tirages, dans cette situation ($[N_1 = i]$), est égal à la probabilité que l'urne associée à X_{i-1} soit vidée en $k-1$ tirages.

Ceci est possible si $i-1 \geq k-1 \Leftrightarrow i \geq k$. Ainsi,

$$\mathbf{P}_{N_1=i}[X_n = k] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq k-1 \\ \mathbf{P}[X_{i-1} = k-1] & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

Ceci vaut pour tout k dans $\llbracket 2, n \rrbracket$, puis pour tout i dans $\llbracket 2, n \rrbracket$, d'où le résultat.

c) Considérant le système complet d'évènements associée à la variable aléatoire N_1 , la formule des probabilités totales et la question précédente donnent pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n = k) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{N_1=i}(X_n = k) \mathbf{P}(N_1 = i) = 0 + \frac{1}{n} \sum_{i=k}^n \mathbf{P}(X_{i-1} = k-1) \\ &\quad \text{termes nuls pour } i \leq k-1 \text{ d'après la question B2b.} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k-1}^{n-1} \mathbf{P}(X_j = k-1) \\ &\quad \text{changement d'indice } \boxed{j = i-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \mathbf{P}[X_n = k] = \frac{1}{n} \sum_{i=k-1}^{n-1} \mathbf{P}[X_i = k-1]}$.

6. Calcul de $\mathbf{P}[X_n = 2]$: les questions B1) et B2c) donnent

$$\mathbf{P}[X_n = 2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}. \text{ Donc } \boxed{\mathbf{P}[X_n = 2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}}$$

7. Soit $n \geq 2$, on a $v_n = n! \mathbf{P}[X_n = n - 1]$.

a) Les questions B1) et B2c) donnent :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+1)! \mathbf{P}[X_{n+1} = n] = \frac{(n+1)!}{n+1} \sum_{i=n-1}^n \mathbf{P}[X_i = n-1] \\ &= n! (\mathbf{P}(X_{n-1} = n-1) + \mathbf{P}(X_n = n-1)) \\ &= \frac{n!}{(n-1)!} + n! \mathbf{P}(X_n = n-1) = n + v_n \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2, v_{n+1} = v_n + n}$.

b) Détermination de $\mathbf{P}[X_n = n - 1]$: utilisons une somme télescopique

$$v_n - v_2 = \sum_{k=2}^{n-1} v_{k+1} - v_k = \sum_{k=2}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} - 1$$

$$\text{Donc } v_n = \frac{n(n-1)}{2} - 1 + 2! \mathbf{P}(X_2 = 1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } \mathbf{P}[X_n = n - 1] = \frac{v_n}{n!} = \frac{n(n-1)}{2n!} :$$

$$\boxed{\mathbf{P}[X_n = n - 1] = \frac{1}{2(n-2)!}}$$

Partie C

8. Le programme suivant simule l'expérience étudiée : la variable **n** décrit le nombre de boules dans l'une à chaque étape ; la variable **x** comptent le nombre de tirages effectués.

```
import numpy.random as rd

def X(n):
    x=1
    r=rd.randint(1,n+1)
    while r>1:
        x=x+1
        r=rd.randint(1,r)
    return x
```