

# DM 22

à rendre le mardi 20 mai 2025

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne  $\mathcal{U}_n$  contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si une boule tirée porte le numéro  $k$ , avant de procéder au tirage suivant, on enlève toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à  $k$ .

On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne  $\mathcal{U}_n$  de toutes ses boules.

$\Rightarrow$  Afin de formaliser les évènements, vous pourrez introduire de nouvelles variables aléatoires et/ou des évènements exprimant "le numéro de la boule obtenue lors du  $i$ ème tirage".

## Partie A

1. Donner la loi de  $X_1$ , la loi de  $X_2$  et leurs espérances.
2. Déterminer la loi de  $X_3$  et calculer  $\mathbf{E}(X_3)$ .
3. Déterminer la loi de  $X_4$  et calculer  $\mathbf{E}(X_4)$ .

## Partie B

On étudie désormais le cas général.

4. Calculer  $\mathbf{P}[X_n = 1]$  et  $\mathbf{P}[X_n = n]$ .
5. Soit  $N_1$  la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée.
  - a) Identifier la loi de  $N_1$ .

$$\text{b) Vérifier que : } \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \mathbf{P}_{N_1=i}[X_n = k] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq k-1 \\ \mathbf{P}[X_{i-1} = k-1] & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

$$\text{c) Montrer que : } \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \mathbf{P}[X_n = k] = \frac{1}{n} \sum_{i=k-1}^{n-1} \mathbf{P}[X_i = k-1].$$

On pourra admettre le résultat (c) pour résoudre les questions suivantes.

6. Calculer  $\mathbf{P}[X_n = 2]$ .
7. Pour  $n \geq 2$ , on pose  $v_n = n! \mathbf{P}[X_n = n-1]$ .
  - a) Établir que :  $\forall n \geq 2, v_{n+1} = v_n + n$ .
  - b) En déduire  $\mathbf{P}[X_n = n-1]$ .

## Partie C

8. Compléter le script PYTHON de la fonction suivante qui simule l'expérience étudiée :

```
import numpy.random as rd
def X(n):
    x=...
    r=rd.randint(...)
    while ...:
        x=...
        r=...
    return x
```