

DS 10

Mercredi 21 mai 2025 – durée : 4 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Étude d'une symétrie

On note $E = \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n + 1$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n + 1 \rrbracket$, on admet que l'expression $X^{2n+1} \times \frac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k} . On désigne par Id l'endomorphisme identique de E et on note f l'application qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ définie par : $f(P) = X^{2n+1}P\left(\frac{1}{X}\right)$.

Par exemple : $f(1 - X) = X^{2n+1} - X^{2n}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. a) Vérifier que $f \circ f = \text{Id}$ et donc aussi $(f - \text{Id}) \circ (f + \text{Id}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 b) Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f + \text{Id}) = \{0_E\}$
 c) En déduire que

$$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) + \dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) = \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f + \text{Id})) \leq \dim(E)$$

- d) Vérifier que $\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - \text{Id})$. Utilisant le théorème du rang, montrer que

$$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) + \dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) = \dim(E)$$

- e) Dédurre de ce qui précède que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}) = E$

- f) Considérant $Q \in \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $R \in \text{Ker}(f + \text{Id})$. Exprimer $f(Q + R)$ comme une combinaison linéaire de P et Q . Identifier f .

3. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ un polynôme de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.

- a) Montrer que les $(a_k)_{k \in \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket}$ vérifient : $\forall k \in \llbracket 0, 2n + 1 \rrbracket, \quad a_k = a_{2n+1-k}$.
 b) En déduire une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$ ainsi que sa dimension.

4. Déterminer de la même façon une base de $\text{Ker}(f + \text{Id})$ et sa dimension.

5. Considérons $n = 2$ et $P = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + gX^5 \in E$.

- a) Donner l'expression de f .
- b) Donner la décomposition de P sur $\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id})$
- c) En déduire deux façons de déterminer l'expression de $h \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur $\text{Ker}(f + \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(f - \text{Id})$.

Problème 2 - VADF

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

Partie A - étude de f

1. a) Définir M , la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- b) Déterminer la dimension de $\text{Im}(f)$ puis celle de $\text{Ker}(f)$.
- c) Donner une base de $\text{Ker}(f)$.
- d) Montrer que $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, avec

$$a = 2e_1 + e_2 + e_3, \quad b = -2e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad c = e_2 - e_3$$

- e) Donner les coordonnées de $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ dans la base $\mathcal{C}$ et en déduire $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

$$2. \text{ On pose } P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis que : $M = PDP^{-1}$.
- b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1} .
- c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j , on a $M^j = PD^jP^{-1}$.
- d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j .
Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie B - étude d'une suite de variables aléatoires

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :

Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.

Soit X_k a pris la valeur j , différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

Par exemple, l'obtention des numéros (3, 2, 1, 1, 2, 2) donne $X_1 = 3$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$, $X_4 = 1$, $X_5 = 2$, $X_6 = 2$.

3. Reconnaître la loi de X_1 .
4. Considérant les numéros des boules obtenues lors des huit premiers tirages (1, 3, 3, 2, 1, 2, 3, 2) alors donner les valeurs de $(X_k)_{k \in [1, 8]}$.

5. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

On rappelle que `randint(a,b+1)` renvoie un entier aléatoire compris entre a et b .

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k , l'entier k étant le paramètre d'entrée :

```

1  from numpy.random import randint
2
3  def simul(k):
4      X=randint(1,4)
5      for i in ...:
6          tirage=randint(1,4)
7          if X==1:
8              X=...
9          elif ...
10             X=1
11         else:
12             X=...
13     return X

```

6. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$.

a) Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

b) On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements.

Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k U_0$.

7. a) Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

b) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k , puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right).$$

c) Montrer que pour $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, la suite $(\mathbf{P}(X_k = j))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge.

On définit la variable X par $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(X = j) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_k = j)$$

Vérifier que la loi de X est bien une loi de probabilité.

$\Rightarrow$ On dit que la suite (X_k) converge en loi vers la variable aléatoire X .

8. a) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(X_k)$ de X_k .

b) Écrire une fonction PYTHON, notée `esp(k)`, qui renvoie $\mathbf{E}(X_k)$.

Exercice 3 - Criblage de la série harmonique

Le série $\sum \frac{1}{k}$ est appelée **série harmonique**.

Cribler la série harmonique consiste à considérer la série d'une suite extraite de $\left(\frac{1}{k}\right)$, autrement dit, remplacer certains de ces termes par zéro. Notre objectif sera d'étudier la nouvelle série ainsi obtenue.

1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
2. Criblage sur la parité de k : étudier la nature des séries $\sum \frac{1}{2^j}$ et $\sum \frac{1}{2^j + 1}$.
3. Criblage sur le motif '12' : pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ contient '12' dans son écriture décimale} \\ \frac{1}{k} & \text{sinon} \end{cases}$$

Par exemple : $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_{121} = 0$, $u_{213} = \frac{1}{213}$, $u_{456123} = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=10^{n-1}}^{10^n-1} u_k$ et $r_n = \text{Card}\{k \in [10^{n-1}, 10^n - 1]; u_k \neq 0\}$: v_n est la somme des termes de $\sum u_k$ dont k s'écrit avec exactement n chiffres.

- a) Montrer que $v_n \leq \frac{r_n}{10^{n-1}}$
 - b) Montrer que $r_n \leq 99 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times 10$.
 - c) En déduire que $v_n \leq 100 \left(\sqrt{\frac{99}{100}} \right)^n$
 - d) En déduire que $\sum v_n$ converge.
 - e) Conclure sur la nature de $\sum u_k$.
4. Criblage sur la primalité de k : soit $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers.
Pour $n \geq 1$, on pose $w_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$.
 - a) Montrer que la suite (w_n) est convergente si et seulement si la suite $(\ln(w_n))$ est convergente.
 - b) En déduire que la suite (w_n) est convergente si et seulement si la série $\sum \frac{1}{p_k}$ est convergente.
 - c) Démontrer que $w_n = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^j} \right)$.
 - d) En déduire que $w_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.
 - e) En déduire la nature de $\sum \frac{1}{p_k}$.
 - f) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de $\sum \frac{1}{p_k^\alpha}$?

Exercice 4 - Résolution de $X^2 = A$

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A - Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner A^{-1} .

Partie B - Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

3. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1, 1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
4. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

5. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue.
Développer $(P(x))^2$.
6. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C - Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A .

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Soient u , v et w les vecteurs définis par :
$$\begin{cases} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$$
 - a) Calculer les vecteurs v et u .
 - b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
 - d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.
8. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $N^2 = T$.
 - a) Montrer que $N^2 = T$ implique $NT = TN$.
 - b) En déduire qu'il existe a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que N soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- c) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2 .
9. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2 .
10. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

FIN DE L'ÉNONCÉ

