

Proposition de corrigé du devoir surveillé 10

Exercice 1 - Étude d'une symétrie

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$,

$$f(P) = X^{2n+1} P \left(\frac{1}{X} \right) = X^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{a_k}{X^k} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^{2n+1-k} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$$

Donc $f : E \rightarrow E$.

Soit $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= X^{2n+1-k}(\alpha P + \beta Q) \left(\frac{1}{X} \right) = X^{2n+1-k} \left(\alpha P \left(\frac{1}{X} \right) + \beta Q \left(\frac{1}{X} \right) \right) \\ &= \alpha X^{2n+1-k} P \left(\frac{1}{X} \right) + \beta X^{2n+1-k} Q \left(\frac{1}{X} \right) = \alpha f(P) + \beta f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Ainsi, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2. a) Soit $P \in E$,

$$f^2(P) = f(f(P)) = f \left(X^{2n+1} P \left(\frac{1}{X} \right) \right) = X^{2n+1} \times \left(\frac{1}{X} \right)^{2n+1} P(X) = P(X)$$

Ainsi, $\boxed{f \circ f = \text{Id}}$

$$f \circ f = \text{Id} \Leftrightarrow f^2 - \text{Id} = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow (f - \text{Id}) \circ (f + \text{Id}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Ainsi, $\boxed{(f - \text{Id}) \circ (f + \text{Id}) = 0_{\mathcal{L}(E)}}.$

b) On a $0_E \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f + \text{Id})$. De plus, pour $P \in E$,

$$P \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f + \text{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} (f - \text{Id})(P) = 0_E \\ (f + \text{Id})(P) = 0_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(P) - P = 0_E \\ f(P) + P = 0_E \end{cases} \Leftrightarrow f(P) = P = 0_E$$

Ainsi, $\boxed{\text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f + \text{Id}) = \{0_E\}}.$

c) D'une part $\text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f + \text{Id})$ est un sous-espace vectoriel de E , donc

$$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f + \text{Id})) \leq \dim(E)$$

D'autre part, la formule de Grassman donne :

$$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f + \text{Id})) = \dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) + \dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) - \underbrace{\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f + \text{Id}))}_{=0 \text{ d'après 2b)}}$$

Ainsi, $\boxed{\dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) + \dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) = \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f + \text{Id})) \leq \dim(E)}.$

d) Comme $(f - \text{Id}) \circ (f + \text{Id}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $\boxed{\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - \text{Id})}.$

De plus, E est de dimension $2n + 2$ (finie) et $f + \text{Id} \in \mathcal{L}(E)$; le théorème du rang donne :

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) + \dim(\text{Im}(f + \text{Id})) \\ &\quad \text{or } \text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}) \Rightarrow \dim(\text{Im}(f + \text{Id})) \leq \dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) \\ \dim(E) &\leq \dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) + \dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) \end{aligned}$$

Il vient, considérant le résultat 2c) :

$$\dim(E) \leq \dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) + \dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) \leq \dim(E)$$

Ainsi, $\boxed{\dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) + \dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) = \dim(E)}$.

e) Les résultats de 2b) et 2d) caractérisent que $\text{Ker}(f + \text{Id})$ et $\text{Ker}(f - \text{Id})$ sont supplémentaires dans E , c'est-à-dire $\boxed{\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}) = E}$.

f) Soit $Q \in \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $R \in \text{Ker}(f + \text{Id})$. On a donc $f(Q) - Q = 0_E$ ou encore $f(Q) = Q$ et $f(R) + R = 0_E$ ou encore $f(R) = -R$.

$$f(Q + R) = f(Q) + f(R) = Q - R$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une symétrie}}$ par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{Id})$.

Remarque : La question 2 est la preuve de $\boxed{\Leftarrow}$ de la caractérisation suivante avec $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$f \text{ est une symétrie} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ f = \text{Id}$$

3. a) On a $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k \in \text{Ker}(f - \text{Id})$, donc

$$f(P) = P \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=0}^{2n+1} a_{2n+1-j} X^j = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$$

On a posé $\boxed{j = 2n + 1 - k}$. Par identification des coordonnées dans la base canonique on trouve que $\boxed{P \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \llbracket 0, 2n + 1 \rrbracket, a_k = a_{2n+1-k}}$.

b) On note : $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{j=0}^n a_{2n+1-j} X^{2n+1-j}$

On a effectué le changement d'indice $\boxed{j = 2n + 1 - k}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f - \text{Id}) &= \left\{ \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k; \forall k \in \llbracket 0, 2n + 1 \rrbracket, a_k = a_{2n+1-k} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{j=0}^n a_{2n+1-j} X^{2n+1-j}; \forall k \in \llbracket 0, 2n + 1 \rrbracket, a_k = a_{2n+1-k} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=0}^n a_k X^{2n+1-k}; \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^n a_k (X^k + X^{2n+1-k}); \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}(X^k + X^{2n+1-k}; k \in \llbracket 0, n \rrbracket) \end{aligned}$$

La famille exhibée est génératrice par construction. De plus elle est libre car elle est échelonnée en degré.

Ainsi, $\boxed{\text{une base de } \text{Ker}(f - \text{Id}) \text{ est } (X^k + X^{2n+1-k}; k \in \llbracket 0, n \rrbracket) \text{ et } \dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) = n + 1}$.

4. Soit $P \in \text{Ker}(f + \text{Id})$, alors :

$$f(P) = -P \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^{2n+1-k} = - \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$$

Par identification des coordonnées on a : $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket, a_k = -a_{2n+1-k}}$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f - \text{Id}) &= \left\{ \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k; \forall k \in \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket, a_k = -a_{2n+1-k} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{j=0}^n -a_j X^{2n+1-j}; \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^n a_k (X^k - X^{2n+1-k}); \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}(X^k - X^{2n+1-k}; k \in \llbracket 0, n \rrbracket) \end{aligned}$$

La famille exhibée est génératrice (par construction) et libre (échelonnée en degré).

Ainsi, $\boxed{\text{une base de Ker}(f + \text{Id}) \text{ est } (X^k - X^{2n+1-k}; k \in \llbracket 0, n \rrbracket) \text{ et } \dim(\text{Ker}(f + \text{Id})) = n + 1.}$

5. Considérons $n = 2$ et $P = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + gX^5 \in E$.

a) Par définition, on a $\boxed{f : a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + gX^5 \mapsto aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + g.}$

b) Une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$ est $(1 + X^5, X + X^4, X^2 + X^3)$ et une base de $\text{Ker}(f + \text{Id})$ est $(1 - X^5, X - X^4, X^2 - X^3)$. Il s'agit de trouver $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + gX^5 = \alpha(1 + X^5) + \beta(X + X^4) + \gamma(X^2 + X^3) + \delta(1 - X^5) + \mu(X - X^4) + \lambda(X^2 - X^3)$$

Ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \alpha & & +\delta & & & = a \\ & \beta & & & \mu & = b \\ & & \gamma & & \lambda & = c \\ & & \gamma & & -\lambda & = d \\ & \beta & & & -\mu & = e \\ \alpha & & -\delta & & & = g \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{a+g}{2}, \beta = \frac{b+e}{2}, \gamma = \frac{c+d}{2} \\ \delta = \frac{a-g}{2}, \mu = \frac{b-e}{2}, \lambda = \frac{c-d}{2} \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + gX^5 &= \underbrace{\frac{a+g}{2}(1 + X^5) + \frac{b+e}{2}(X + X^4) + \frac{c+d}{2}(X^2 + X^3)}_{\in \text{Ker}(f - \text{Id})} \\ &\quad + \underbrace{\frac{a-g}{2}(1 - X^5) + \frac{b-e}{2}(X - X^4) + \frac{c-d}{2}(X^2 - X^3)}_{\in \text{Ker}(f + \text{Id})} \end{aligned}$$

c) Approche 1 : En utilisant la décomposition obtenue en 5b), la définition du projecteur donne directement le résultat :

$$h : a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + gX^5 \mapsto \frac{a-g}{2}(1 - X^5) + \frac{b-e}{2}(X - X^4) + \frac{c-d}{2}(X^2 - X^3)$$

Approche 2 : le projecteur h est une combinaison linéaire de f et Id : $\boxed{h = \frac{1}{2}(\text{Id} - f).}$

On trouve la même expression.

Problème 2 - VADF

Partie A - étude de f

1. a) Les coordonnées des vecteurs $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données :

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, f(e_2) = f(e_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Cherchons une base de $\text{Im}(f)$ qui est engendrée par $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$:

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$\Rightarrow$ En général, pour obtenir une base à partir d'une famille génératrice, on applique la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes afin d'une part de conserver l'aspect générateur et d'autre part d'obtenir une famille échelonnée et donc libre.

Ainsi, une base de $\text{Im}(f)$ est $(e_2 + e_3, e_1)$ et donc $\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = 2}$.

Le théorème de rang donne $\boxed{\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1}$.

c) Une base de $\text{Ker}(f)$ contient un seul vecteur : il suffit donc d'exhiber un vecteur u non nul tel que $f(u) = 0$. Or $f(e_2 - e_3) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_1 = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{une base de } \text{Ker}(f) \text{ est } (e_2 - e_3)}$.

d) Calculons le rang de $\mathcal{C}$:

$$\text{rg}(\mathcal{C}) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =_{C_2 \leftarrow C_2 + C_1} \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{2} & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} =_{C_3 \leftarrow 2C_3 - C_1} \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = 3$$

Comme $\text{rg}(\mathcal{C}) = \dim \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$; de plus, $\text{rg}(\mathcal{C}) = \text{Card}(\mathcal{C})$, donc $\mathcal{C}$ est libre.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

e) On a $f(a) = 2f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = \frac{2}{3}(e_2 + e_3) + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_1 = \frac{2}{3}(2e_1 + e_2 + e_3) = \frac{2}{3}a$.

On trouve aussi $f(b) = -\frac{2}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) = -\frac{2}{3}b$ et $f(c) = 0$.

$$\text{Ainsi, } \boxed{f(a) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_c, f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}_c \text{ et } f(c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_c \text{ et } D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. a) $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

Posons $\boxed{D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)}$ la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

Ainsi, la formule de changement de base donne que $\boxed{M = PDP^{-1}}$.

b) On calcule et on trouve $PQ = 4I$.

Par exemple, le coefficient $(1, 2)$ est : $p_{1,1}q_{1,2} + p_{1,2}q_{2,2} + p_{1,3}q_{3,2} = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 2 = 0$.

Ainsi $P \left(\frac{1}{4}Q \right) = I$ et donc $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$.

c) Effectuons la récurrence :

- Initialisation : pour $n = 0$, $M^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$. La relation est vérifiée au rang 0.
- Hérédité : soit $n \geq 0$, supposons que $M^n = PD^nP^{-1}$.
On a $M^{n+1} = M^nM = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
La relation est vérifiée au rang $n + 1$.
- Conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}}$.

d) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Considérons la première colonne de $P^{-1} : \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La première colonne de D^jP^{-1} est : $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (\frac{2}{3})^j \\ -(\frac{2}{3})^j \\ 0 \end{pmatrix}$

La première colonne de PD^jP^{-1} est : $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (\frac{2}{3})^j \\ -(\frac{2}{3})^j \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(\frac{2}{3})^j + 2(-\frac{2}{3})^j \\ (\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j \\ (\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j \end{pmatrix}$

Ainsi, pour $j \in \mathbb{N}^*$, la première colonne de M^j est $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(\frac{2}{3})^j + 2(-\frac{2}{3})^j \\ (\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j \\ (\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j \end{pmatrix}$

Pour $j = 0$, l'expression ci-dessus donne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est bien la première colonne de $M^0 = I$.

Partie B - étude d'une suite de variables aléatoires

3. X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue lors du premier tirage, donc $X_1(\Omega)$. De plus, les numéros sont équiprobables donc $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)}$.

4. Considérant les numéros (1, 3, 3, 2, 1, 2, 3, 2) alors $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 3, X_4 = 1, X_5 = 1, X_6 = 2, X_7 = 1, X_8 = 2$.

5. Simulation informatique de l'expérience ; il suffit de suivre la description :

```
1 def simul(k):
2     X=randint(1,4)
3     for i in range(2,k+1):
4         tirage=randint(1,4)
5         if X==1:
6             X=tirage
7         elif tirage!=X:
8             X=1
9         else:
10            X=tirage
11     return X
```

6.a) Il y a essentiellement deux situations :

- Soit $[X_k = 1]$ alors $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \mathbf{P}_{(X_k=1)}(X_{k+1} = i) = \frac{1}{3}$
- Soit $[X_k \in \{2, 3\}]$. Par exemple, pour $j = 2, \mathbf{P}_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1)$ correspond à deux situations :

la boule tirée au rang $k + 1$ est numérotée 1 ou 3; ainsi, $\mathbf{P}_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3}$. De plus,
 $\mathbf{P}_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 3) = 0$.

Ainsi,

$\mathbf{P}_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$j = 2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$j = 3$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, considérons le système complet associé à X_k .

La formule des probabilités totales donne :

- $\mathbf{P}(X_{k+1} = 1) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}(X_k = i) \mathbf{P}_{(X_k=i)}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{3} \mathbf{P}(X_k = 1) + \frac{2}{3} \mathbf{P}(X_k = 2) + \frac{2}{3} \mathbf{P}(X_k = 3)$
- $\mathbf{P}(X_{k+1} = 2) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}(X_k = i) \mathbf{P}_{(X_k=i)}(X_{k+1} = 2) = \frac{2}{3} \mathbf{P}(X_k = 1) + \frac{1}{3} \mathbf{P}(X_k = 2)$
- $\mathbf{P}(X_{k+1} = 3) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}(X_k = i) \mathbf{P}_{(X_k=i)}(X_{k+1} = 3) = \frac{2}{3} \mathbf{P}(X_k = 1) + \frac{1}{3} \mathbf{P}(X_k = 3)$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, U_{k+1} = AU_k$ avec $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Procédons par réurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

- Initialisation : pour $n = 0$, $A^0 = I$ donc $A^0 U_0 = U_0$

Pour $n = 1$, on note que $AU_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui représente bien la loi de X_1 : $U_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ Il est nécessaire de traiter le cas $n = 1$ dans l'initialisation car la relation de récurrence du 6b) n'est valable que sur $\mathbb{N}^*$.

- Hérédité : soit $k \geq 0$, supposons $U_k = A^k U_0$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= AU_k \text{ d'après B3b) } \\ &= AA^k U_0 \text{ par hypothèse de récurrence } \\ &= A^{k+1} U_0 \end{aligned}$$

- Conclusion, $\forall k \in \mathbb{N}, U_k = A^k U_0$.

7.a) On remarque que $A = M + \frac{1}{3}I$.

Comme M et I commutent, la formule du binôme de Newton donne pour $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M^j \left(\frac{1}{3}I\right)^{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

b) D'après 2d) et 7a), la première colonne de A^k avec $k \in \mathbb{N}$ est donnée par :

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix}$$

La formule du binôme donne : $\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^k = 1^k = 1$ et

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^k = \left(-\frac{1}{3}\right)^k.$$

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$, la première colonne de A^k se réécrit : $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{pmatrix}$

D'après 6c), pour $k \in \mathbb{N}$, $U_k = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc U_k est égale à la première colonne de A^k .

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$, la loi de X_k est donc $\mathbf{P}(X_k = 1) = \frac{1}{4} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$

et $\mathbf{P}(X_k = 2) = \mathbf{P}(X_k = 3) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$

c) Comme $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ alors $\left(-\frac{1}{3}\right)^k \rightarrow 0$ donc $\left(-\frac{1}{3}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, $\mathbf{P}(X_k = 1) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X_k = 2) = \mathbf{P}(X_k = 3) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}$

On a bien $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $\mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) = 1$.

$\Rightarrow$ Ainsi, la suite X_k converge en loi vers $X : X_k \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

8. a) Par définition de l'espérance, pour $k \in \mathbb{N}^*$, d'après 7b) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_k) &= 1\mathbf{P}(X_k = 1) + 2\mathbf{P}(X_k = 2) + 3\mathbf{P}(X_k = 3) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) + \frac{2}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) + \frac{3}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \\ &= \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}(X_k) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$.

b) Petite fonction en SCILAB :

```
def esp(k)
    return 7/4 - 3/4 * (-1/3)**k
```

Exercice 3 - Criblage de la série harmonique

1. Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. La suite (H_n) est croissante donc elle admet une limite soit finie, soit $+\infty$.

Montrons par l'absurde que la limite est $+\infty$.

Supposons que $H_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on a :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Alors, par opération sur les limites et passage à la limite on obtient : $\ell - \ell = 0 \geq \frac{1}{2}$ ce qui est faux.

Donc $H_n \rightarrow +\infty$. Ainsi, la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ diverge.

2. Criblage sur la parité de k :

- $\sum_{j=1}^n \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} H_n \rightarrow +\infty$
- $\sum_{j=1}^n \frac{1}{2j+1} \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j+2} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} (H_{n+1} - 1) \rightarrow +\infty$

Ainsi, les séries $\sum \frac{1}{2j}$ et $\sum \frac{1}{2j+1}$ divergent.

3. Criblage sur le motif '12' :

a) Pour $k \in [10^{n-1}, 10^n - 1]$, on a $u_k \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{10^{n-1}}$.

Or r_n est le nombre de termes non nul de la somme v_n . Ainsi, $v_n \leq \frac{r_n}{10^{n-1}}$.

b) Considérons k ayant une écriture décimale comportant n chiffres en partant de la gauche. On découpe le nombre par groupe de deux chiffres consécutifs. Exemple pour $n = 7$ et $k = 1231213$

12	31	21	3
----	----	----	---

Le nombre de bloc est $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (le quotient de la division euclidienne de n par 2).

Ainsi r_n est inférieur au nombre d'entiers à n chiffres tel que 12 n'apparaît pas dans aucun de ces blocs.

Ainsi, $r_n \leq 99^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \times 10$.

c) Les deux questions précédentes donnent :

$$v_n \leq \frac{r_n}{10^{n-1}} \leq \frac{99^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \times 10}{10^{n-1}} = 100 \frac{99^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{10^n} \leq 100 \frac{99^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{10^{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} = 100 \left(\frac{99}{100} \right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \leq 100 \left(\frac{99}{100} \right)^{\frac{n}{2}}$$

Ainsi, $v_n \leq 100 \left(\sqrt{\frac{99}{100}} \right)^n$.

d) La série $\sum \left(\sqrt{\frac{99}{100}} \right)^n$ est géométrique de raison $\sqrt{\frac{99}{100}} \in]-1, 1[$ donc convergente. Par compa-

raison de série à terme positifs, la série $\sum v_n$ converge.

e) Les sommes partielles de $\sum v_n$ sont donc majorée par M qui est aussi un majorant des sommes partielles de la série $\sum u_k$.

En effet, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $t = \left\lfloor \frac{\ln(N)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$ est le nombre de chiffre de l'écriture décimale de N et donc $N \leq 10^t - 1$. Effectuons un regroupement de termes par paquets dont l'indice est de longueur décimale constante :

$$\sum_{k=1}^N u_k = \sum_{j=1}^{t-1} \underbrace{\sum_{k=10^{j-1}}^{10^j-1} u_k}_{=v_j} + \underbrace{\sum_{k=10^{t-1}}^N u_k}_{\leq v_t} \leq \sum_{j=1}^{t-1} v_j + v_t \leq M$$

Ainsi, la série harmonique criblée par le mot '12', qui est une série à terme positif, converge.

4. Crible sur la primalité de k :

Pour $n \geq 1$, on pose $w_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$.

a) On note que $w_n \geq 1$ car c'est le produit de n nombres supérieurs à 1.

Donc par continuité de $\ln$ sur $[1, +\infty[$, la suite (w_n) converge vers $\ell \geq 1$ implique que la suite $(\ln(w_n))$ converge vers $\ln(\ell)$.

De même, la continuité de $\exp$ sur $\mathbb{R}$ donne que la convergence de la suite $(\ln(w_n))$ implique celle de la suite (w_n) .

Ainsi, la suite (w_n) est convergente si et seulement si la suite $(\ln(w_n))$ est convergente.

b) Considérons $\ln(w_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}\right) = - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

Donc $\ln(w_n)$ est une somme partielle de la série à termes positifs $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$. Or la suite de nombres premiers, (p_n) , tend vers $+\infty$, donc $\left(\frac{1}{p_n}\right)$ converge vers 0 et

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \sim \frac{1}{p_n}$$

Par comparaison de série à termes positifs, les séries $\sum \frac{1}{p_n}$ et $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ sont de même nature, qui est aussi celle de la suite $(\ln(w_n))$ et donc aussi celle de la suite (w_n) .

Ainsi, la suite (w_n) est convergente si et seulement si la série $\sum \frac{1}{p_k}$ est convergente.

c) Pour tout $k \geq 1$, $p_k > 1$ donc $\frac{1}{p_k} \in [0, 1[$ donc la série géométrique $\sum \frac{1}{p_k}$ converge et a pour somme $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$.

Ainsi, $w_n = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^j} \right)$.

d) D'après ce qui précède :

$$w_n = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \dots\right)$$

Le développement de ce produit donne la somme d'une série à termes positifs qui contient tous les termes de la forme $\frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}}$ où $(a_i)_{[1,n]} \in \mathbb{N}$.

Or pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a que $1 \leq j \leq n \leq p_n$. Ainsi la décomposition en facteur premier de j se réalise dans $\{p_i; i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ et donc $\frac{1}{j}$ est un terme apparaissant dans le développement de w_n . Ainsi,

$$w_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

e) Comme la série $\sum \frac{1}{j}$ diverge, par comparaison (avec la suite des ses sommes partielles qui tend vers $+\infty$) la suite (w_n) diverge. Et donc, d'après la deuxième question, la série $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge.

f) Si $\alpha \leq 1$, $\frac{1}{p_k^\alpha} \geq \frac{1}{p_k}$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{p_k^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha > 1$, $\frac{1}{p_k^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$. Par comparaison de séries à termes positifs avec la série de Riemann converge (pour $\alpha > 1$), la série $\sum \frac{1}{p_k^\alpha}$ converge.

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{p_k^\alpha}$ converge si et seulement $\alpha > 1$.

Exercice 4

Partie A - Étude de la matrice A

$$1. (A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le coefficient $(3, 2)$ est obtenu par : $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 3 = 0$

$$(A - I)^3 = (A - I)^2(A - I) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Puisque $(A - I)^3$ est la matrice nulle, le polynôme $(X - 1)^3 \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice A .

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Rightarrow A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3$$

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 \\ -8 & 9 & 4 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } A^2 - 3A + 3I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -5 & 6 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -5 & 6 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Il est aussi possible de mettre en place la méthode du pivot de Gauss.

Partie B - Recherche d'une solution particulière

3. La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et la fonction polynomiale $x \mapsto 1 + x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1, 1[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$.

Par composition, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1, 1[$.

Attention ! La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est continue en 0 mais non dérivable. Veillez aussi à bien rédiger l'hypothèse de composition " $f(I) \subset J$ ".

On dérive deux fois φ pour obtenir $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$. Pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \varphi''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) (1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{et donc } \varphi'(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$

4. La fonction φ étant de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 (sur un intervalle ouvert contenant 0), elle y admet un développement limité à l'ordre 2 donné par la formule de Taylor-Young :

$$\varphi(x) = \underbrace{\varphi(0)}_{=1} + \underbrace{\varphi'(0)}_{=\frac{1}{2}} x + \underbrace{\frac{\varphi''(0)}{2}}_{=-\frac{1}{8}} x^2 + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Ainsi, le réel } \alpha \text{ recherché vaut donc } -\frac{1}{8}.$$

5. En développant selon " $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$ ", on a :

$$\begin{aligned}(P(x))^2 &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2 \\&= 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(-\frac{x^2}{8}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} \times \left(-\frac{x^2}{8}\right)\right) \\&= 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(P(x))^2 = 1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}}.$

6. On obtient, avec $C^3 = C^4 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ d'après 1) :

$$(P(C))^2 = P^2(C) = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C = A$$

La matrice $M = P(C)$ vérifie donc bien $M^2 = A$, et :

$$\begin{aligned}M &= P(C) = I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 \\&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la matrice } M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ vérifie } M^2 = A.}$

Partie C - Résolution complète de l'équation

7. a) En notant U, V et W les vecteurs colonnes correspondant respectivement à u, v et w (coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, les relations $v = f(w) - w$ et $u = f(v) - v$ se traduisent par :

$$\begin{aligned}V &= AW - W = CW = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\U &= AV - V = CV = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{v = (1, 1, -3) \text{ et } u = (-6, -6, 0).}$

b) Calculons la rang de la famille :

$$\begin{aligned}\text{rg}(U, V, W) &= \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{-6} & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \text{rg} \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\&\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \text{rg} \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3\end{aligned}$$

Comme $\text{rg}(\mathcal{B}') = 3 = \text{Card}(\mathcal{B}')$ alors la famille est libre ; de plus $\text{rg}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donne que la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$; ainsi, $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

c) Calculons $f(u)$ en utilisant la matrice A :

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $f(u) = u$

Les relations de l'énoncé nous donnent directement $f(v)$ et $f(w)$ comme combinaisons linéaires de u, v et w : $f(v) = u + v$ et $f(w) = v + w$.

Ainsi, la matrice de f dans la base (u, v, w) est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

d) Puisque A et T représentent l'endomorphisme f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, en notant $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (donc inversible), la formule de changement de bases donne :

$$T = P^{-1}AP$$

8. a) Rappelons que $N^2 = T$. Alors :

$$NT = NN^2 = N^3 = N^2N = TN$$

Ainsi, $N^2 = T$ implique $NT = TN$.

b) Notons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, la relation $NT = TN$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} a = a+d \\ a+b = b+e \\ b+c = c+f \\ d = d+g \\ d+e = e+h \\ e+f = f+i \\ g+h = h \\ h+i = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = e \\ b = f \\ g = 0 \\ d = h \\ e = i \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e = i \\ d = g = h = 0 \\ b = f \end{cases}$$

Ainsi, si $N^2 = T$, alors N est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

c) Si $N^2 = T$, alors avec les notations de la question précédente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{8} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Ainsi, $N^2 = T$ possède exactement deux solutions $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N_2 = -N_1$.

9. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En posant $N = P^{-1}MP$, on a :

$$M^2 = A \Leftrightarrow (PNP^{-1})^2 = A \Leftrightarrow PN^2P^{-1} = A \Leftrightarrow N^2 = P^{-1}AP \Leftrightarrow N^2 = T$$

Ainsi, l'équation $M^2 = A$ admet exactement deux solutions : $M_1 = PN_1P^{-1}$ et $M_2 = -M_1$.

10. La matrice nulle n'est pas solution de l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Ainsi, l'ensemble E n'est pas un espace vectoriel.