Corrigé du DM 23

1. a) L'urne se vide lors du n-ème tirage sans remise, donc du n-ème tirage de d'ordre impair. Ainsi, $\boxed{N = 2n-1}$.
b) Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$, avant le $(2j)$-ème tirage et le $(2j+1)$-ème, il y a eu j tirages impairs, $\{1, 3, \dots, 2j-1\}$, il reste $n-j$ boules dans l'urne dans les deux situations.

2. a) Les boules sont indiscernable dans l'urne donc $\boxed{\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{n}}$ et $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$.
D'après le descriptif de l'expérience : $(X_2 = 1) = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)$. La probabilité conditionnelle donne :

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{X_1=0}(X_1 = 1) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

<u>Autre approche :</u> considérons le système complet d'évènement associé à X_1, la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) + \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{n} \times 0 + \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

b) Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$, le contenu de l'urne est le même avant les $(2j+1)$ et $(2j)$-ème tirages, donc $\mathbf{P}(X_{2j+1} = 1) = \mathbf{P}(X_{2j} = 1)$.
De plus, $(X_{2j} = 1) = (X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-1} = 0) \cap (X_{2j} = 1)$, la formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{2j} = 1) &= \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{X_1=0}(X_3 = 0)\cdots\mathbf{P}_{\bigcap_{k=0}^{j-2}(X_{2k+1}=0)}(X_{2j-1} = 0)\mathbf{P}_{\bigcap_{k=0}^{j-1}(X_{2k+1}=0)}(X_{2j} = 1)\\ &= \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-j}{n-j+1}\frac{1}{n-j} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall j \in [\![1, n-1]\!], \quad \mathbf{P}(X_{2j+1} = 1) = \mathbf{P}(X_{2j} = 1) = \frac{1}{n}.}$

c) On en déduit que $\boxed{\forall k \in [\![1, N]\!], \quad X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right).}$

3. a) Avant le $(2n-2)$-ème tirage, l'urne ne contient qu'un boule qui sera tiré lors de deux dernières tirages. Ainsi, la dernière boule, tirée lors du $(2n-1)$-ème tirage a déjà été tirée lors du $(2n-2)$-ème tirage. Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(U_n) = 0.}$
Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a $U_j = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-2} = 0) \cap (X_{2j-1} = 1)$. La formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(U_j) &= \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{X_1=0}(X_2 = 0)\cdots\mathbf{P}_{\bigcap_{k=1}^{2j-3}(X_k=0)}(X_{2j-2} = 0)\mathbf{P}_{\bigcap_{k=1}^{2j-2}(X_k=0)}(X_{2j-1} = 1)\\ &= \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{n-j+1}{n-j+2}\frac{n-j+1}{n-j+2}\frac{n-j}{n-j+1}\frac{1}{n-j+1}\\ &= \frac{n-j}{n(n-1)}\end{aligned}$$

L'expression reste valide pour $j = n$; ainsi, $\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!], \ \mathbf{P}(U_j) = \frac{n-j}{n(n-1)}.}$

b) L'évènement $(X = 1)$ traduit que la boule noire est piochée une seule fois et enlevée du même coup ; ainsi, elle est piochée uniquement sur un rang impair. D'après le description de l'expérience, $\boxed{(X = 1) = \bigcup_{j=1}^{n} U_j}$ et comme les (U_j) sont 2 à 2 incompatibles,

$$\mathbf{P}(X = 1) = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(U_j) = \sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{n(n-1)} = \frac{n^2}{n(n-1)} - \frac{n(n+1)}{2n(n-1)} = \frac{n(n-1)}{2n(n-1)} = \frac{1}{2}$$

c) L'évènement $(X = n)$ traduit que la boule noire est piochée $n-1$ fois sur les rangs pairs de 2 à $2n-2$, puis piochée au rang $2n-1$.

On a $\quad (X = n) \quad = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0) \cap (X_4 = 1) \cap \cdots$
$\qquad \cap (X_{2n-3} = 0) \cap (X_{2n-2} = 1) \cap (X_{2n-1} = 1)$

La formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = n) &= \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{X_1=0}(X_2 = 1)\cdots \mathbf{P}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}\left((X_{2k-1}=0)\cap(X_{2k}=1)\right)}(X_{2n-1} = 1) \\
&= \frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{n-2}{n-1}\,\frac{1}{n-2}\,\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\times 1\times 1 \\
&= \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{1}{n!}.}$

4. Par définition des X_k et de X et sachant qu'il y a exactement $N = 2n-1$ tirages, il vient $\boxed{X = \sum\limits_{k=1}^{2n-1} X_k.}$

Et par linéarité de l'espérance, $\boxed{\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{2n-1} \mathbf{E}(X_k) = \dfrac{2n-1}{n}.}$

5. Soit $i \in [\![0, n-2]\!]$.

a) Comme les tirages d'ordre impair sont sans remise, la réalisation de $(X_{2i+1} = 1)$ entraine que l'urne ne contient plus la boule noire lors des tirages ultérieurs.

Ainsi, $\boxed{\forall j \in [\![1, 2n-2i-2]\!], \quad \mathbf{P}(X_{2i+j+1} = 1 | X_{2i+1} = 1) = 0.}$

b) Pour $j \in [\![1, 2n-2i-2]\!]$ il vient

$$\mathbf{P}\big((X_{2i+j+1} = 1) \cap (X_{2i+1} = 1)\big) = \mathbf{P}(X_{2i+1} = 1)\mathbf{P}(X_{2i+j+1} = 1 | X_{2i+1} = 1) = 0$$

X_{2i+1} \ X_{2i+j+1}	0	1
0	★	★
1	★	0

Donc $\mathbf{E}(X_{2i+1}X_{2i+j+1}) = 0$ et donc $\mathbf{Cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = 0 - \mathbf{E}(X_{2i+1})\mathbf{E}(X_{2i+j+1}) = -\dfrac{1}{n^2}$.

Ainsi, $\boxed{\forall j \in [\![1, 2n-2i-2]\!], \quad \mathbf{Cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = -\dfrac{1}{n^2}.}$

6. Soit i un entier naturel compris entre 1 et $n-1$. La réalisation de $(X_{2i} = 1)$ signifie que l'expérience se poursuit avec un urne contenant $n-i$ boules dont une noire et $n-i-1$ blanches.

Donc, pour $k \in [\![1, n-i-1]\!]$, $\mathbf{P}(X_{2i+2k} = 1 | X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$ qui correspond à la probabilité de $(X_{2k} = 1)$ d'une expérience analogue avec $n-i$ boules.

De même, pour $k \in [\![0, n-i-1]\!]$, $\mathbf{P}(X_{2i+2k+1} = 1 | X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$ qui correspond à la probabilité de X_{2k+1} d'une expérience analogue avec $n-i$ boules.

a) Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1, n-i-1]\!], \quad \mathbf{P}(X_{2i+2k} = 1 | X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}.}$

b) Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![0, n-i-1]\!], \ \mathbf{P}(X_{2i+2k+1} = 1 | X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}.}$

c) Soit $j \in [\![1, 2n-2i-1]\!]$, il vient :

$$\mathbf{P}\big((X_{2i+j} = 1) \cap (X_{2i} = 1)\big) = \mathbf{P}(X_{2i} = 1)\mathbf{P}(X_{2i+j} = 1 | X_{2i} = 1) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-i}$$

La table de la loi conjointe de (X_{2i}, X_{2i+j}) est de la forme :

X_{2i} \ X_{2i+j}	0	1
0	★	★
1	★	$\frac{1}{n(n-i)}$

donc $\mathbf{E}(X_{2i}X_{2i+j}) = \dfrac{1}{n(n-i)}$ et $\mathbf{Cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) = \dfrac{1}{n(n-i)} - \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{i}{n^2(n-i)}$.

Ainsi, $\boxed{\forall j \in [\![1, 2n-2i-1]\!], \quad \mathbf{Cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) = \dfrac{i}{n^2(n-i)}.}$

7. Les (X_k) ne sont pas indépendantes, la calcul de la variance de X donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X) &= \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} X_k\right) = \sum_{k=1}^{2n-1} \mathbf{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2n-1} \mathbf{Cov}(X_i, X_j) \\
&= (2n-1) \times \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=2k+1}^{2n-1} \mathbf{Cov}(X_{2k}, X_j)}_{\text{cas } i=2k \text{ pairs}} + 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=2k}^{2n-1} \mathbf{Cov}(X_{2k-1}, X_j)}_{\text{cas } i=2k-1 \text{ impairs}} \\
&= \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=2k+1}^{2n-1} \frac{k}{n^2(n-k)} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=2k}^{2n-1} -\frac{1}{n^2} \\
&= \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(2n-2k-1)}{n^2(n-k)} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n-2k}{n^2} \\
&\qquad \text{or } k(2n-2k-1) = (n-k)(2k+1) - n \\
&= \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2} + 2\frac{2n(n-1)}{2n^2} + 2\frac{n-1}{n^2} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n^2(n-k)}\right) - 2\frac{2n(n-1)}{n^2} + 2\frac{2n(n-1)}{2n^2} \\
&= \frac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n-k}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{V(X) = \dfrac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \dfrac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{j}.}$