

Fonctions réelles de 2 variables

1 Continuité

1.1 Topologie euclidienne de $\mathbb{R}^2$

Définition – Norme euclidienne

On appelle **norme euclidienne** de $\mathbb{R}^2$ la norme associée au produit scalaire canonique :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Définition – Boule ouverte

Soit $A \in \mathbb{R}^2$. On appelle **boule ouverte** de centre A et de rayon $r > 0$ l'ensemble

$$B(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2; \|M - A\| < r\}$$

Remarque – $B(A, r)$ est en fait le disque de centre A et de rayon r , cercle non compris.

On peut aussi introduire la notion de boules fermée en remplaçant l'inégalité stricte par une large.

Exercice : Dans $\mathbb{R}^2$, une autre norme est : $\| \cdot \|_1 : (x, y) \mapsto |x| + |y|$. Représenter la boule unité $B(O, 1)$.

[1] à compléter

| **Solution** –

Définition – Ensemble ouvert

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On dit que Ω est une **partie ouverte** de $\mathbb{R}^2$ si $\Omega = \emptyset$ ou si pour tout $A \in \Omega$, il existe $r > 0$, tel que $B(A, r) \subset \Omega$.

Exemple

$\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte, $\emptyset$ aussi.

Exercices :

1. Toute boule ouverte est une partie ouverte.
2. Si I et J sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}^2$ alors $I \times J$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

[2] à compléter

| **Solution** –

Proposition – Une intersection finie d'ouverts est un ensemble ouvert.

Une réunion quelconque d'ouverts est un ensemble ouvert.

[3] à compléter

| **Démonstration** –

Définition – Ensemble fermé

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On dit que Ω est une **partie fermée** de $\mathbb{R}^2$ lorsque son complémentaire $\bar{\Omega}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Attention ! Une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert. Contre-exemple : $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} B\left(A, \frac{1}{n}\right) = \{A\}$.

Remarque – Une partie de $\mathbb{R}^2$ peut-être ni ouverte, ni fermée. Par exemple, $[0, 1[\times]0, 1[$.

Exemples

1. $\mathbb{R}^2$ est une partie fermée (c'est donc une partie à la fois ouverte et fermée).
2. Toute boule fermée est une partie fermée.
3. Si I et J sont des intervalles fermés de $\mathbb{R}^2$ alors $I \times J$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Corollaire – Une réunion finie de fermés et une intersection quelconque de fermés sont des fermés.

Démonstration –

| Cela découle de la règle de Morgan.

Remarque – Un ensemble fermé est un ensemble qui contient intégralement son bord. Un ensemble ouvert est un ensemble qui ne contient aucun point de son bord.

1.2 Fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^2$. Continuité

1.2.1 Graphe d'une fonction réelle à deux variables

Définition – Fonction réelle de deux variables

On appelle fonction réelle de deux variables toute fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire toute fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemples

$$\begin{aligned} 1. f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto 2x + \cos(x + y) \end{cases} \\ 2. f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \ln(xy) + \frac{1}{x+y} \end{cases} \end{aligned}$$

Définition – Graphe

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$. On appelle graphe de f l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ et } z = f(x, y)\}$.

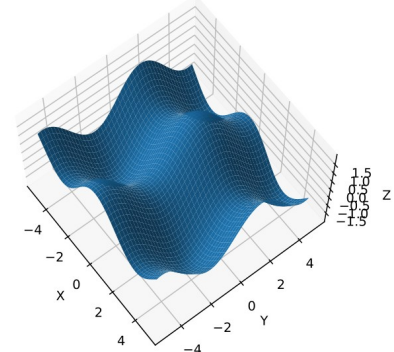
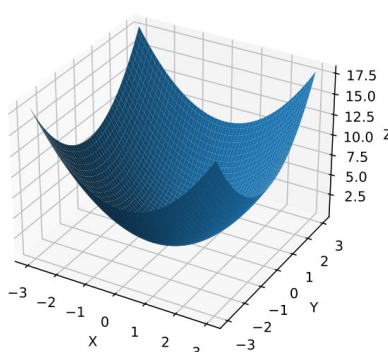
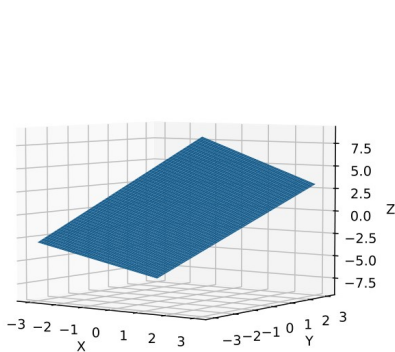
Exemple

Le graphe d'une fonction affine, c'est-à-dire d'une fonction de la forme $f : (x, y) \mapsto ax + by + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, est un plan.

$$(x, y) \mapsto 2x - y$$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

$$(x, y) \mapsto \cos(x) + \sin(y)$$



Définition – Courbes de niveau

Soit f définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel λ , on appelle courbe de niveau λ l'ensemble $\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = \lambda\}$.

Exemples

1. Les lignes de niveau d'une fonction affine sont des droites.
2. Les lignes de niveau de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sont des cercles.

1.2.2 Continuité

Dans toute la suite du cours, U désignera une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Définition – Fonction continue en un point de U

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $M_0 \in U$. On dit que f est continue en M_0 lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $M \in B(M_0, \alpha) \cap U$, alors $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

Remarque – La formulation $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ traduit que la limite ne dépend pas du chemin suivi quand M tend M_0 . Ainsi, un moyen de montrer qu'une application n'est pas continue en un point est de trouver deux chemins qui y mènent et qui donnent des limites différentes ou alors de trouver un chemin dont la limite est infinie ou tout simplement différente de l'image du point.

Exemple de chemin : en ligne droite, en spirale, etc.

Exemple

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{n'est pas continue en } (0, 0) \text{ car } f(t, 0) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}.$$

Définition – Fonction continue sur U

On dit que f est continue sur U si elle est continue en tout point de U .

Proposition – On suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que $g(0) = 0$ et qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $M \in B(M_0, r) \cap U$ on ait : $|f(M) - f(M_0)| \leq g(d(M, M_0))$ alors f est continue en M_0 .

Méthode : Majorer $|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$ par une expression en $d(M, M_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

$$M \rightarrow M_0 \Leftrightarrow d(M, M_0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \rightarrow 0$$

En particulier, en 0, on a : $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemples

1. Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les projections $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
3. $M \mapsto d(A, M)$ est continue car $|d(A, M) - d(A, P)| \leq d(M, P)$.
4. La fonction définie par $f(x, y) = \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ est continue en $(0, 0)$.

$$\triangleright |f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0} 0$$

$\triangleright$ Méthode par passage en polaire : $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$ alors $d(M, O) = \rho$

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} = \rho(\cos^2(\theta) + \cos(\theta) \sin(\theta)) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

5. La fonction définie par $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = a$ n'est pas continue en $(0, 0)$ quel que soit a .

$\triangleright \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0$ donc f non continue en $(0, 0)$

$\triangleright f(x, y) = \frac{2\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{\rho^2} = 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dots$ la valeur dépend de l'angle d'approche !

Exercice : Les applications suivantes sont-elles prolongeables par continuité en $(0, 0)$:

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad h(x, y) = \frac{(x + y)^2}{x^2 + 3y^2}$$

[4] à compléter

Solution –

Exercice : ✨ Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si l'image réciproque par f de tout intervalle ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$.

[5] à compléter

Solution –

Exemples

1. Le demi-plan $ax + by + c > 0$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Cet exercice permet de redémontrer que les boules ouvertes sont des ouverts et les boules fermées des fermés. en effet, considérant $f : M \mapsto d(M, M_0)$ continue alors $B(M_0, r) = f^{-1}(]-r, r[)$ est un ouvert.

Remarque – Conformément au programme, les résultats généraux ne sont pas introduits. Nous pouvons toutefois citer leur existence :

- lorsqu'elles sont bien définies, la somme, le produit, le quotient d'applications définies et continues sur U , sont continues sur U ;
- la composition à gauche par une application continue de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est continue sur U ;
- le théorème des bornes : Si f est continue sur C , une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, alors f est bornée sur C et elle y atteint ses bornes, autrement dit il existe $M_1, M_2 \in C$ tels que :

$$\forall M \in C, f(M_1) \leq f(M) \leq f(M_2).$$

2 Dérivabilité partielle

Pour une fonction réelle d'une variable réelle, la notion de dérivabilité est liée à l'existence d'une tangente non verticale. La tangente étant obtenue par la limite de cordes, ainsi sa pente est la limite de pentes de cordes : limite de taux d'accroissement.

Il est possible d'introduire cette notion sur toute courbe obtenue en prenant l'intersection entre la surface et un plan du type $A + t\vec{v} + u\vec{k}$ dans le repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ avec $\vec{v} \in \text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$.

Définition – Dérivée directionnelle

Soient $f \in \mathbb{R}^U$, $M \in U$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est dérivable en M dans la direction $\vec{v}$ si $t \mapsto f(M + t\vec{v})$ est dérivable en 0. En particulier, on note $D_{\vec{v}}f(M) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t} \in \mathbb{R}$ (limite finie).

Cette approche nous invite à déterminer deux dérivées directionnelles particulières, appelées *dérivées partielles* : celle où $\vec{v} = \vec{i}$ et celle où $\vec{v} = \vec{j}$.

2.1 Dérivées partielles

Définition – Dérivées partielles

Soient $f \in \mathbb{R}^U$ et $M \in U$.

(i) S'il existe, le réel $D_{\vec{i}}f(M)$ est appelé **première dérivée partielle** en M , noté $\frac{\partial f}{\partial x}(M)$.

(ii) S'il existe, le réel $D_{\vec{j}}f(M)$ est appelé **seconde dérivée partielle** en M , noté $\frac{\partial f}{\partial y}(M)$.

Remarques –

1. L'existence de la *première dérivée partielle* repose sur le fait que la fonction $t \mapsto f(x + t, y)$ soit dérivable en 0 où M est de coordonnées (x, y) .

2. La notation $\frac{\partial f}{\partial x}(M)$ ou encore $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ contient une ambiguïté. Les deux lettres x ne réfèrent pas au même objet :

- celui en ∂x indique que l'on dérive dans la direction $\vec{i}$, c'est une "convention" d'écriture et on pourrait plus simplement noter $\partial_1 f(M)$ ou $\partial_1 f(x, y)$;
- celui en (x, y) précise les coordonnées du point M que l'on pourrait écrire avec d'autre lettre : $\frac{\partial f}{\partial y}(u, v)$.

3. Dans la pratique, pour calculer une dérivée partielle, on fixe une des deux variables qui joue alors le rôle de paramètre, et on dérive par rapport à l'autre variable.

Exemples

- Si $f(x, y) = ax + by + c$ alors f admet des dérivées partielles en tout point $M \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b$.
- Soit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}$. En tout point $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f admet des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$$

Exercice : Soit f définie par $f(0, 0) = 0$ et pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

- Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.
- f est-elle continue en $(0, 0)$?
- Que conclure ?

[6] à compléter

| **Solution** –

Exercice : Donner les dérivées partielles de g en tout point avec $g(0, 0) = 0$ et pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $g(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{2x^2 + y^2}$.

[7] à compléter

| **Solution** –

Exercice : Soient $f, g \in \mathbb{R}^U$ admettant une première dérivée partielle en $M \in U$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Montrer $f + g$, λf et fg admettent une première dérivée partielle en M et

$$\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x}(M) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(M) + \frac{\partial g}{\partial x}(M) \text{ et } \frac{\partial fg}{\partial x}(M) = f(M) \frac{\partial g}{\partial x}(M) + g(M) \frac{\partial f}{\partial x}(M)$$

2. Si de plus $g(M) \neq 0$, montrer que $\frac{f}{g}$ et $\frac{1}{g}$ admettent une première dérivée partielle en M et

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) (M) = \frac{1}{g(M)^2} \left(g(M) \frac{\partial f}{\partial x} (M) - f(M) \frac{\partial g}{\partial x} (M) \right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g} \right) (M) = \frac{-1}{g(M)^2} \frac{\partial g}{\partial x} (M)$$

3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ avec I un intervalle et $f(U) \subset I$. Montrer que $\varphi \circ f$ admet une première dérivée partielle en M et

$$\frac{\partial \varphi \circ f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \varphi' \circ f$$

[8] à compléter

| Solution –

Définition – Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f \in \mathbb{R}^U$ (avec U ouvert). On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f admet des dérivées partielles en tout point de U et si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U .

Proposition –

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + g$, λf et fg sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Si de plus g ne s'annule pas sur U alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Exemple

Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et les quotient de fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition.

Exercice : Montrer que $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

[9] à compléter

| Solution –

2.2 Gradient et développement limité à l'ordre 1

Définition – Gradient

Soient $f \in \mathbb{R}^U$ et $M \in U$. Si f admet des dérivées partielles en M , on appelle gradient de f en M et on note $\nabla f(M)$ (lu "nabla de f en M ") le vecteur de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\nabla f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M) \right).$$

Définition – Développement limité à l'ordre 1

Soient $f \in \mathbb{R}^U$ et $M \in U$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en M lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction ε continue en $(0, 0)$ et s'annulant en $(0, 0)$ tels que, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(x + h, y + k) \in U$, on ait :

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + ah + bk + \|(h, k)\| \varepsilon(h, k).$$

On note aussi $f(x + h, y + k) \underset{(0,0)}{=} f(x, y) + ah + bk + o(\|(h, k)\|)$.

Remarques –

- En notant $H = (h, k)$ et $G = (a, b)$, on a : $f(M + H) = f(M) + \langle G, H \rangle + o(\|H\|)$.
- Le $DL_1(M_0)$ pour $M_0 \in U$ s'écrit aussi $f(x, y) \underset{x_0, y_0}{=} f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$.

Proposition – (avec les notation de la définition)

Si f admet un DL_1 en M alors f est continue en M et admet des dérivées partielles en M : $\nabla f(M) = (a, b)$

Remarques –

- L'existence des dérivées partielles n'assure pas l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.
- L'existence d'un DL_1 ne permet pas de conclure que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème – Existence d'un DL_1

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, alors f possède un développement limité à l'ordre 1 en tout point de U .

Autrement dit, pour tout $M \in U$ et pour tout $H \in \mathbb{R}^2$ tels que $M + H \in U$, on a :

$$f(M + H) = f(M) + \langle \nabla f(M), H \rangle + o(\|H\|)$$

Démonstration –

| Admise

Exercice : Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $M \in U$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unitaire (ie. $\|\vec{v}\| = 1$).1. Montrer que $t \mapsto f(M + t\vec{v})$ est dérivable en 0.2. En déduire que $D_{\vec{v}}f(M) = \langle \nabla f(M), \vec{v} \rangle$.

[10] à compléter

| Solution –

Corollaire – Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors f est continue sur U .**Remarque –** L'étude du comportement local autour de M_0 nous invite à considérer la fonction

$$(h, k) \mapsto f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Le DL_1 donne une expression affine en première approximation. A la fin de ce cours, nous reviendrons sur cette approche pour l'étude des extremums.

Définition – **Approximation affine, plan tangent**Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en M_0 alors on appelle :(i) approximation affine de f au voisinage de M_0 la fonction $(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ (ii) plan tangent au graphe de f en M_0 : $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$.**Exercice :** Donner un vecteur normal au plan tangent en M lorsque f admet un DL_1 en M .

[11] à compléter

| Solution –

Exercice : Donner l'équation du plan tangent du graphe de $(x, y) \mapsto 3x^2y - 1$ en $M(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

[12] à compléter

| Solution –

2.3 Règle de la chaîne

Théorème – Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ avec I un intervalle réel et pour tout $t \in I$, $(u(t), v(t)) \in U$. Alors la fonction $g : t \mapsto f(u(t), v(t)) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et, pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t))u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))v'(t)$$

Démonstration –Travaillons sur les DL_1 . Soit $t_0 \in I$, $M_0 = (x_0, y_0) = (u(t_0), v(t_0))$

- DL_1 de f en M_0 : $f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|)$
- DL_1 de u et v en t_0 : $u(t) \underset{t_0}{=} u(t_0) + (t - t_0)u'(t_0) + o(t - t_0)$ et $v(t) \underset{t_0}{=} v(t_0) + (t - t_0)v'(t_0) + o(t - t_0)$

Donc $g(t) = f(u(t_0) + h, v(t_0) + k)$ avec $h \underset{t_0}{=} (t - t_0)u'(t_0) + o(t - t_0)$ et $k \underset{t_0}{=} (t - t_0)v'(t_0) + o(t - t_0)$.

$$g(t) \underset{t_0}{=} f(u(t_0), v(t_0)) + (t - t_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0), v(t_0))v'(t_0) \right) + o(t - t_0)$$

Ainsi g admet un DL_1 en t_0 donc est dérivable en t_0 et on obtient l'expression de $g'(t_0)$.**Exemple**Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. La fonction $t \mapsto f(\cos(t), t^3 - 1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$t \mapsto -\sin(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t), t^3 - 1) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(\cos(t), t^3 - 1)$$

Exercice : Soit $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{-xy}$. Donner l'expression de la dérivée de $\varphi : t \mapsto f(t^2, t)$.

[13] à compléter

| Solution –

Théorème – Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

(i) Règle de la chaîne : soit $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ avec I un intervalle réel et $\gamma(I) \subset U$.

Les deux composantes de γ , $(t \mapsto \gamma_1(t), t \mapsto \gamma_2(t))$, sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2)$.

Alors $f \circ \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \gamma'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + \gamma'_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

(ii) Dérivée directionnelle : f est dérivable en tout point et dans toute les directions.

En particulier, pour tout $M \in U$ et $\vec{v} = (h, k) \in \mathbb{R}^2$:

$$D_{\vec{v}} f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)h + \frac{\partial f}{\partial y}(M)k = \langle \nabla f(M), \vec{v} \rangle$$

(iii) Interprétation géométrique du gradient : le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f et dirigé dans la direction où f croît le plus vite

Démonstration –

(i) Simple réécriture de la règle de la chaîne.

(ii) Cas particulier de la règle de la chaîne avec $\gamma(t) = M + t\vec{v}$.

(iii) Soit $k \in \mathbb{R}$, on considère la ligne de niveau de hauteur k : $\mathcal{L}_k = \{(x, y) \in U; f(x, y) = k\}$ et notons γ la fonction associée (s'il en ait une) : $\forall M \in \mathcal{L}_k, \exists t \in I; M = \gamma(t)$.

Comme pour tout $t \in I$, $f(\gamma(t)) = k$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = 0$ et donc la règle de la chaîne en t donne $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$.

Ainsi, $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal à $\gamma'(t)$ qui est la direction de la tangente de $\mathcal{L}_k$ en $M = \gamma(t)$.

Par conséquence, le gradient pointe dans la direction où f augmente le plus.

Théorème – **Changement de variables** - $f \circ \psi$ avec $\psi = (x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Soit U, Ω deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $x, y \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\psi = (x, y)$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ tels que pour tout $(u, v) \in \Omega$, $\psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in U$.

On pose $F = f \circ \psi = f(x(u, v), y(u, v))$. Alors $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$:

$$(i) \quad \partial_1 F(u, v) = \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f \circ \psi}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u}(f(x(u, v), y(u, v))) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))$$

$$(ii) \quad \partial_2 F(u, v) = \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f \circ \psi}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v}(f(x(u, v), y(u, v))) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))$$

En bref, cela s'écrit : $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemple

En utilisant le changement en coordonnées polaires, nous allons déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1((\mathbb{R}_+^*)^2)$ vérifiant

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Posons $F = f \circ \varphi$ avec $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Approche 1 :

• Analyse : Déterminons $\frac{\partial F}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Ainsi, $\theta \mapsto F(r, \theta)$ est constante, indépendante de θ mais possiblement dépendante de r .

Il existe φ telle que $F(r, \theta) = \varphi(r)$. Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ alors φ aussi.

Les solutions sont : $\{(x, y) \mapsto \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}); \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})\}$

• Synthèse : soit $f : (x, y) \mapsto \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

$$y \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \varphi'(\sqrt{x^2 + y^2}) = x \frac{\partial f}{\partial y}$$

Approche 2 : On détermine $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ à remplacer dans l'équation.

On pose $f = F \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi^{-1} : (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \text{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial r}(\varphi^{-1}(x, y)) - \frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}(\varphi^{-1}(x, y)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial r}(\varphi^{-1}(x, y)) - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}(\varphi^{-1}(x, y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial r}(\varphi^{-1}(x, y)) + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}(\varphi^{-1}(x, y))$$

$$\text{Ainsi, } x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dots \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0.$$

3 Extremums

Définition – Extremum

Soit $f \in \mathbb{R}^U$ et $A \in U$. On dit que f possède un *minimum local* [resp. *maximum local*] en A s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $M \in B(A, r)$, $f(M) \geq f(A)$ [resp. $f(M) \leq f(A)$].

Un *extremum* est un minimum ou un maximum. On parle d'un *extremum global* lorsque la comparaison est vérifiée sur tout le domaine de définition.

Définition – Point critique

On dit que A est un *point critique* de f si le gradient de f s'annule en A .

Théorème – Condition nécessaire d'existence d'un extremum

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Si f admet un extremum local en A , alors A est un point critique de f .

Démonstration –

Les fonctions $t \mapsto f(A + t\vec{v})$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ admettent un extremum en A un point intérieur à l'intervalle ouvert de définition ; ainsi, leur dérivée s'annule. En particulier, les dérivées partielles de f s'annulent au point A , donc $\nabla f(A) = 0$.

Remarque – Un point critique A d'une fonction f peut être :

1. un maximum, lorsque toutes les fonctions partielles $t \mapsto f(A + t\vec{u})$ admettent un maximum en A

Par exemple, le point $(0, 0)$ est un point critique de $f(x, y) = -x^2 - y^2$. C'est le maximum de la fonction f ;

2. un minimum, lorsque toutes les fonctions partielles $t \mapsto f(A + t\vec{u})$ admettent un minimum en A

Par exemple, le point $(0, 0)$ est un point critique de $f(x, y) = x^2 + y^2$. C'est le minimum de la fonction f .

3. Un point selle, lorsqu'il existe une direction $\vec{u}$ telle que la fonction partielle $t \mapsto f(A + t\vec{u})$ admet un maximum en 0 et une directions $\vec{v}$ telle que la fonction partielle $t \mapsto f(A + t\vec{v})$ admet un minimum en 0.

Méthode : Pour rechercher les extrémums de f de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ensemble fermé, borné Ω , on recherche parmi :

- les points critiques de Ω où $\nabla f = 0$,
- les extrémums de f sur le bord de Ω . Si on sait paramétrer le bord de Ω par $t \mapsto (u(t), v(t))$ cela aide de rechercher les extrémums de la fonction d'une variable $t \mapsto f(u(t), v(t))$.

Pour terminer le travail, on étudie le signe de $f(x + h, y + k) - f(x, y)$ pour (h, k) au voisinage de $(0, 0)$.

Exercice : Identifier le maximum et le minimum de $f(x, y) = x^3y$ sur l'ensemble $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

[14] à compléter

Solution – ▶ Recherche et étude des points critiques.

▶ Étude des points sur le bord : trouver une courbe γ qui parcourt le bord et étudier $g = f \circ \gamma$.