

# DM 1

à rendre le mercredi 14 septembre 2026

## Coefficients binomiaux

1. Soit  $E$  l'ensemble à 12 éléments  $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ .

a) Dénombrer les parties de  $E$  à 5 éléments qui contiennent :

- (i)  $a$  et  $b$  ;
- (ii)  $a$  mais pas  $b$  ;
- (iii)  $b$  mais pas  $a$  ;
- (iv) ni  $a$ , ni  $b$ .

b) En déduire la relation :  $\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$ .

c) Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour  $2 \leq p \leq n$ , on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$$

d) Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule de Pascal.

2. Montrer que si  $0 \leq q \leq p \leq n$  :  $\binom{n}{p} \binom{p}{q} = \binom{n}{q} \binom{n-q}{n-p}$

## Raisonnements

1. On veut déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

On va procéder par analyse-synthèse.

a) La phase *analyse* aussi appelée *condition nécessaire* permet d'identifier les caractéristiques ou l'expression d'un objet solution au problème.

- (i) Considérant  $x = y = 0$ , en déduire les valeurs possibles de  $f(0)$ .
- (ii) Considérant  $x = 1$  et  $y = 0$ , en déduire  $f(0)$  et  $f(1)$ .
- (iii) Considérant  $y = 0$ , donner l'expression nécessaire de  $f$ .

b) La phase *synthèse* aussi appelée *condition suffisante* permet de vérifier que l'expression obtenue ci-avant est bien solution.

Résoudre l'équation fonctionnelle.

2. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$ .

3. Démontrer que si  $n$  est la somme de deux carrés alors le reste de la division de  $n$  par 4 ne peut jamais être 3.