

Colle 1

Les questions "★" sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Attention ! La notion de somme double n'a pas été introduite.

EXTRAIT DU PROGRAMME

1. RAISONNEMENT ET VOCABULAIRE ENSEMBLISTE

CONTENUS

CAPACITÉ & COMMENTAIRES

A. RUDIMENTS DE LOGIQUE

Quantificateurs.

Implication, contraposition, équivalence.

Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).

L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviations est exclu. Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.

Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante. On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.

2. COMPLÉMENTS DE CALCUL ALGÈBRIQUE ET DE TRIGONOMÉTRIE

A. SOMMES ET PRODUITS

Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.

Notations $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$. Cas où I est vide.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n x^k$.

Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.

Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.

Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.

Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.

MÉTHODES ET SAVOIR-FAIRE

- Manipulation de sommes et produits : changement d'indice, découpage, propriété de télescopage, regrouper des termes.
- Mettre en place les raisonnements, en particulier maîtriser la récurrence.
- Bonne utilisation des symboles dans la rédaction

QUESTIONS DE COURS

★ Citer les formules $\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$ ou $\sum q^k$.

Faire la démonstration d'une des sommes à l'aide d'une récurrence.

→ Lister les propriétés des sommes et produits et donner un exemple de changement d'indice, de découpage, de somme ou produit télescopique, de regroupement de termes.

★ Citer et démontrer la formule du binôme

→ Lister les propriétés des coefficients binomiaux dont les formules de Pascal et du binôme.

Mettre en place le triangle de pascal, donner un exemple d'application à la formule du binôme.

★ Calculer $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k$ en utilisant la méthode de votre choix (combinatoire ou analytique)

★ Définir une implication, sa réciproque, sa négation, sa contraposée.

Justifier et mettre en place sur un exemple le raisonnement par contraposition.

★ Décrire le raisonnement par l'absurde et l'appliquer

★ Décrire le raisonnement par disjonction de cas et l'appliquer

★ Décrire le raisonnement par analyse-synthèse et l'appliquer : par exemple, montrer que toute fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se décompose de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire